

Проекционный оператор минимизации и максимизации линейного функционала с ограничениями на вектор допустимых программных движений

А.А. Ефремов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург

Аннотация: В работе выполнена постановка задач минимизации и максимизации линейного функционала с ограничениями-неравенствами на вектор допустимых программных движений и ограничениями-равенствами, заданным линейным многообразием. Синтезировано аналитическое решение, определяющее проекционный оператор решения указанных задач математического программирования с ограничениями-равенствами и неравенствами. Получено аналитическое решение, определяющее граничные значения множителя Лагранжа для синтезированного проекционного оператора. Проиллюстрирована корректность полученного решения.

Ключевые слова: математическое программирование, линейный функционал, проекционные операторы, допустимые программные движения, стабилизация программных движений, SimInTech.

Введение

«Математическое программирование – раздел математики, посвящённый теории и методам решения задач о нахождении экстремумов функций на множествах, определяемых линейными и нелинейными ограничениями» [1-3]. К настоящему времени разработано множество методов решения указанных задач [4-6]. В работе [7] для решения конечномерных задач математического программирования предлагается использовать проекционно-операторные методы. Опыт использования проекционно-операторных методов иллюстрирует эффективность их применения для синтеза динамических систем [8].

В статье [9] приводится синтез проекционного оператора для решения задачи математического программирования с квадратичными функционалами и ограничениями-неравенствами на вектор допустимых программных движений. Замена квадратичного функционала на линейный преобразует рассмотренные в указанной статье задачи математического

программирования в задачи минимизации и максимизации линейного функционала с ограничением-неравенством на вектор допустимых программных движений. Полученные задачи математического программирования с линейным функционалом относятся к задачам стабилизации программных движений, выделенных в отдельные классы задач управления [10,11] и определяющих актуальные прикладные задачи синтеза динамических систем с ограничениями [12-14].

Проекционно-операторный метод решения задач минимизации и максимизации линейного функционала с ограничениями-неравенствами на вектор допустимых программных движений дополнит полученные ранее результаты в области оптимальной стабилизации программных движений.

Постановка задач минимизации и максимизации линейного функционала с ограничениями-неравенствами на вектор допустимых программных движений

Как указано во введении, замена квадратичного функционала $\varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{C}_0\|^2$ на линейный $\varphi(\mathbf{x}_k) = \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{x}_k$ преобразует рассмотренные в работе [8] задачи математического программирования в задачи минимизации и максимизации линейного функционала с ограничениями-неравенствами на вектор допустимых программных движений \mathbf{C}_k :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{*k} &= \arg \min \left\{ \varphi(\mathbf{x}_k) = \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{x}_k \mid \mathbf{A} \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}, \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k)^2 \leq r^2 \right\} \in \mathbf{R}^n \left(I_{[0;k]}^2 \right), k \in \mathbf{Z}; \\ \mathbf{x}_k^* &= \arg \max \left\{ \varphi(\mathbf{x}_k) = \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{x}_k \mid \mathbf{A} \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}, \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k)^2 \leq r^2 \right\} \in \mathbf{R}^n \left(I_{[0;k]}^2 \right), k \in \mathbf{Z}, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{C}_k – вектор допустимых программных движений для ограничений-неравенств, \mathbf{C}_{1k} – целевой вектор линейного функционала.

Оператор решения задач минимизации и максимизации линейного функционала с ограничениями-неравенствами на вектор допустимых программных движений

Аналитический вывод выражения, определяющего оператор решения задачи (1), приводится в виде доказательств лемм 1 и 2.

Лемма 1. Проекционный оператор решения задач минимизации и максимизации линейного функционала с ограничениями-неравенствами на вектор допустимых программных движений (1) имеет вид

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + 0.5(\lambda_k)^{-1} \mathbf{P}^0 (2\lambda_k \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{1k}), \quad (2)$$

где \mathbf{P}^0 – проектор на линейное многообразие, а \mathbf{P}^+ – проектор на ортогональное дополнение к линейному многообразию. Скалярный параметр λ_k является множителем Лагранжа для ограничения типа неравенства (1).

Доказательство. Функция Лагранжа для задач минимизации и максимизации линейного функционала имеет вид

$$L = \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{x}_k + \lambda_0^T (\mathbf{A} \mathbf{x}_k - \mathbf{b}_k) + \lambda_k \left((\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k)^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k) - r^2 \right). \quad (3)$$

Необходимые условия оптимальности для (3) имеют вид, приравненных к нулю, производных от функции Лагранжа

$$L'_x = \mathbf{C}_{1k} + \mathbf{A}^T \lambda_{0k} + 2\lambda_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k) = \mathbf{0}_n; \quad (4)$$

$$L'_{\lambda_0} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k - \mathbf{b}_k = \mathbf{0}_m; \quad (5)$$

$$L'_{\lambda_k} = (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k)^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k) - r^2 = 0_1. \quad (6)$$

Умноженное на матрицу \mathbf{A} уравнение (4) с учетом равенства (5) определяет уравнение.

$$\mathbf{A} \mathbf{C}_{1k} + \mathbf{A} \mathbf{A}^T \lambda_{0k} + 2\lambda_k \mathbf{b}_k - 2\lambda_k \mathbf{A} \mathbf{C}_k = \mathbf{0}_n.$$

Тогда из полученного уравнения следует совокупность преобразований, определяющая скалярный параметр λ_{0k} , являющийся множителем Лагранжа для ограничения-равенства в задаче (1).

$$\lambda_{0k} = 2\lambda_k (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{C}_k - 2\lambda_k (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b}_k - \mathbf{C}_{1k} (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}. \quad (7)$$

Подстановка множителя Лагранжа λ_{0k} в (4) после раскрытия скобок определяет уравнение

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_{1k} + 2\lambda_k \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{C}_k - 2\lambda_k \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b}_k - \\ & - \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{C}_{1k} + 2\lambda_k \mathbf{x}_k - 2\lambda_k \mathbf{C}_k = \mathbf{0}_n, \end{aligned}$$

Выполнив преобразования и сделав замену проекторов \mathbf{P}^0 и \mathbf{P}^+ , получим выражение, определяющее проекционный оператор решения задачи (1) через множитель Лагранжа λ_k

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + 0.5(\lambda_k)^{-1} \mathbf{P}^0 (2\lambda_k \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{1k})$$

Утверждение доказано.

Лемма 2. Множитель Лагранжа λ_k для ограничений-неравенств задачи (1) определяется в виде

$$\lambda_{k1,2} = \pm \sqrt{\chi_k / \alpha_k}, \quad (8)$$

где $\alpha_k = \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k + r^2$,

$$\chi_k = 0,25 \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{1k}.$$

Доказательство. Для вычисления множителя Лагранжа λ_k выполняется подстановка оператора (2) в условие Лагранжа (6). В результате получаем квадратное уравнение относительно множителя λ_k

$$\left(\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k - 0.5(\lambda_k)^{-1} \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{1k} + \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k \right)^T \left(\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k - 0.5(\lambda_k)^{-1} \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{1k} + \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k \right) = r^2.$$

Умножим правую и левую части полученного выражения на $(\lambda_k)^2$ и применим процедуру транспонирования

$$\begin{aligned} & \left(\lambda_k \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T - 0.5 \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{P}^0 + \lambda_k \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 - \lambda_k \mathbf{C}_k^T \right) \times \\ & \times \left(\lambda_k \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k - 0.5 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{1k} + \lambda_k \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \lambda_k \mathbf{C}_k \right) = \lambda_k^2 r^2. \end{aligned}$$

Далее выполним умножение матриц и векторов

$$\begin{aligned} & \lambda_1^2 \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k - 0.5 \lambda_k \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{1k} + \lambda_k^2 \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \lambda_k^2 \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \\ & - 0.5 \lambda_k \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + 0.25 \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{1k} - 0.5 \lambda_k \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k + 0.5 \lambda_k \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k + \\ & + \lambda_k^2 \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k - 0.5 \lambda_k \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{1k} + \lambda_k^2 \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \lambda_k^2 \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \\ & - \lambda_k^2 \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + 0.5 \lambda_k \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{1k} - \lambda_k^2 \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k + \lambda_k^2 \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k - \lambda_k^2 r^2 = 0_1. \end{aligned}$$

Учтём свойства проекционных операторов [7,8] и приведем подобные

$$\begin{aligned} & \lambda_k^2 \left(\mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k - \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k - r^2 \right) + \\ & + 0.25 \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{1k} = 0_1. \end{aligned}$$

Введем скалярные параметры

$a_k = \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k - \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k - r^2$, $\chi_k = 0.25 \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{1k}$ и запишем квадратное уравнение для нахождения множителя Лагранжа λ_k в виде

$$a_k \lambda_k^2 + \chi_k = 0. \quad (9)$$

Решение квадратного уравнения (9) определяет множитель Лагранжа для ограничений-неравенств λ_k .

$$\lambda_{k1,2} = \pm \sqrt{\chi_k / \alpha_k},$$

где $\alpha_k = \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k + r^2$,

$$\chi_k = 0.25 \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{1k}.$$

Утверждение доказано.

Явный вид проекционного оператора решения задачи минимизации и максимизации линейного функционала с ограничениями (1), с учетом аналитических выражений для множителя Лагранжа λ_k задан равенством

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + 0.5 (\lambda_k)^{-1} \mathbf{P}^0 (2 \lambda_k \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{1k}), \quad (10)$$

где $\alpha_k = \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k + r^2$,

$$\chi_k = 0.25 \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{1k}, \lambda_{k1,2} = \pm \sqrt{\chi_k / \alpha_k}.$$

Стоит отметить, что выражение для определения параметра α_k эквивалентно выражению для параметра квадратного уравнения, синтезированного в работе [9].

Вычислительный эксперимент

В качестве примера применения проекционного оператора (10) рассмотрим решение задачи (1) для линейного функционала:

$$\varphi(\mathbf{x}_k) = \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{x}_k = x_1 + 2x_2 \Rightarrow c^T = [1 \quad 2] \in \mathbf{R}^2, \mathbf{x}_k = [x_{1k} \quad x_{2k}]^T \in \mathbf{R}^2.$$

Линейное многообразие для задачи (1) задано в виде:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_k = x_{1k} + x_{2k} = 1 \Rightarrow \mathbf{A} = [1 \quad 1] \in \mathbf{R}^2, \mathbf{b}_k = 1 \in \mathbf{R},$$

а ограничения-неравенства – шаром:

$$(\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k)^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k) \leq r^2 \Rightarrow \mathbf{C}_k = [\mathbf{C}_{k1} \quad \mathbf{C}_{k2}] \in \mathbf{R}^2,$$

где $r=1$, а компоненты вектора допустимых программных движений \mathbf{C}_k изменяются по линейному закону от $\mathbf{C}_k = [0 \quad 0]^T$ до $\mathbf{C}_k = [1 \quad 1]^T$ (см. рис. 1).

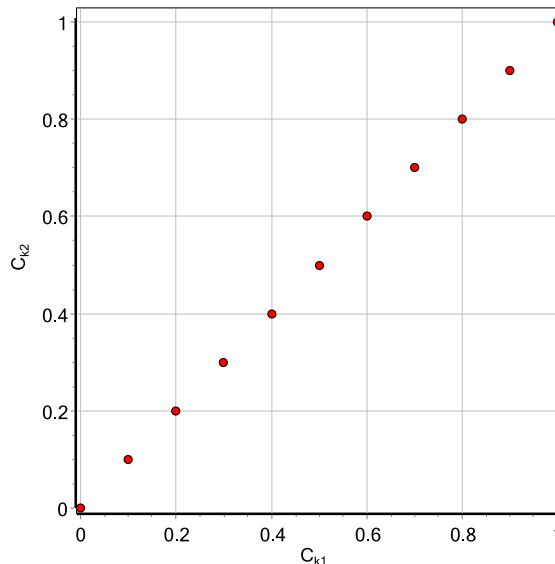


Рис. 1. – Изменение вектора допустимых программных движений \mathbf{C}_k

Шаг 1. Вычисление ортогонального проектора на линейное многообразие \mathbf{P}^0 и проектора на ортогональное дополнение к линейному многообразию \mathbf{P}^+ :

$$\mathbf{P}^0 = \mathbf{E} - \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

Легко показать, что для вычисленных проекционных операторов выполняются свойства идемпотентности, симметричности и ортогональности [7].

Шаг 2. Вычисление параметров квадратного уравнения χ_k и α_k :

$$\chi_k = 0,25 \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_{1k} = 0,25 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0,125.$$

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k1} \\ \mathbf{C}_{k2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k1} & \mathbf{C}_{k2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k1} & \mathbf{C}_{k2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k1} \\ \mathbf{C}_{k2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k1} & \mathbf{C}_{k2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k1} \\ \mathbf{C}_{k2} \end{bmatrix} + 1.$$

Динамика параметра квадратного уравнения α_k вычисленная с учетом вектора допустимых программных движений \mathbf{C}_k (см. рис. 1) в среде моделирования SimInTech [15] показана на рисунке 2.

Шаг 3. Вычисление корней квадратного уравнения $\lambda_{k1,2} = \pm \sqrt{\chi_k / \alpha_k}$.

Результат вычисления корней квадратного уравнения λ_{k1} и λ_{k2} приведен на рисунке 3.

Шаг 4. Вычисление векторов \mathbf{x}_* и \mathbf{x}^* .

Вычисление векторов \mathbf{x}_* и \mathbf{x}^* , обеспечивающих минимум и максимум линейного функционала $\varphi(\mathbf{x}_k) = \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{x}_k$ с ограничениями, заданными в виде

линейного многообразия $\mathbf{Ax}_k = \mathbf{b}_k$ и шара $(\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k)^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k) \leq r^2$ обеспечивают операторы:

$$\mathbf{x}_k^* = \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + 0.5(-\lambda_k)^{-1} \mathbf{P}^0 (-2\lambda_k \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{1k});$$

$$\mathbf{x}_{*k} = \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + 0.5(\lambda_k)^{-1} \mathbf{P}^0 (2\lambda_k \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{1k}).$$

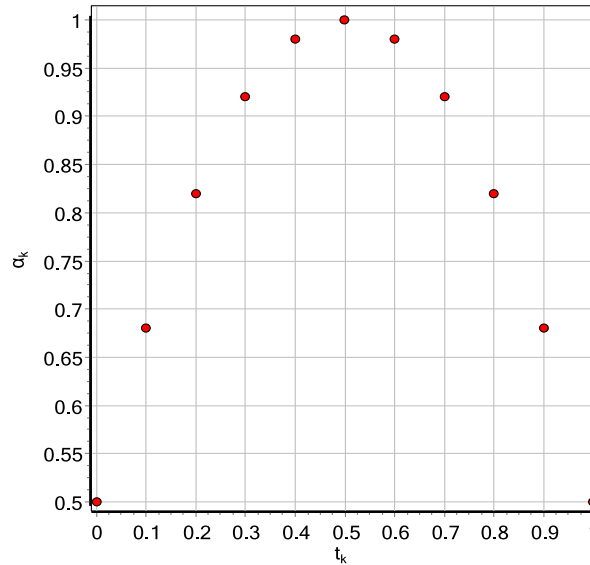


Рис. 2. – Динамика параметра α_k

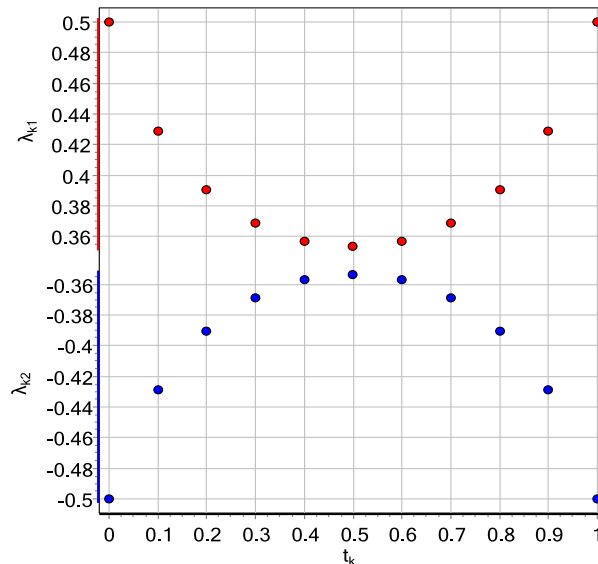


Рис. 3. – Динамика корней квадратного уравнения λ_{k1} и λ_{k2}

Результаты вычисления векторов \mathbf{x}_* и \mathbf{x}^* , а также соответствующие им значения линейных функционалов показаны на рис. 4 и 5.

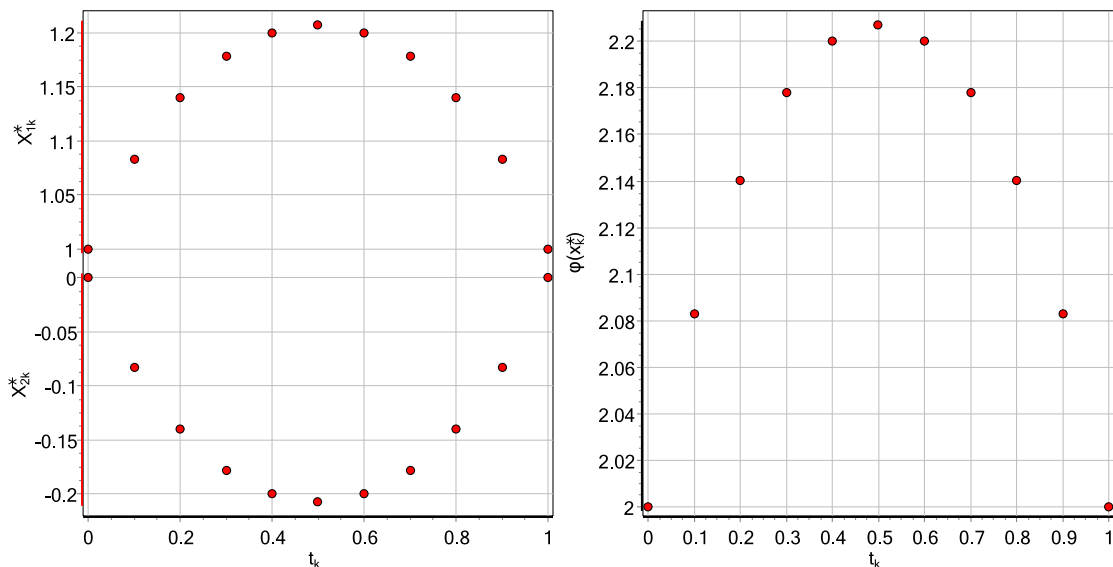


Рис. 4. – Динамика элементов максимизирующего вектора $\mathbf{x}_k^* = \begin{bmatrix} x_{1k}^* & x_{2k}^* \end{bmatrix}$ и соответствующее изменение значений максимума линейного функционала

$$\varphi(\mathbf{x}_k^*) = \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{x}_k^*$$

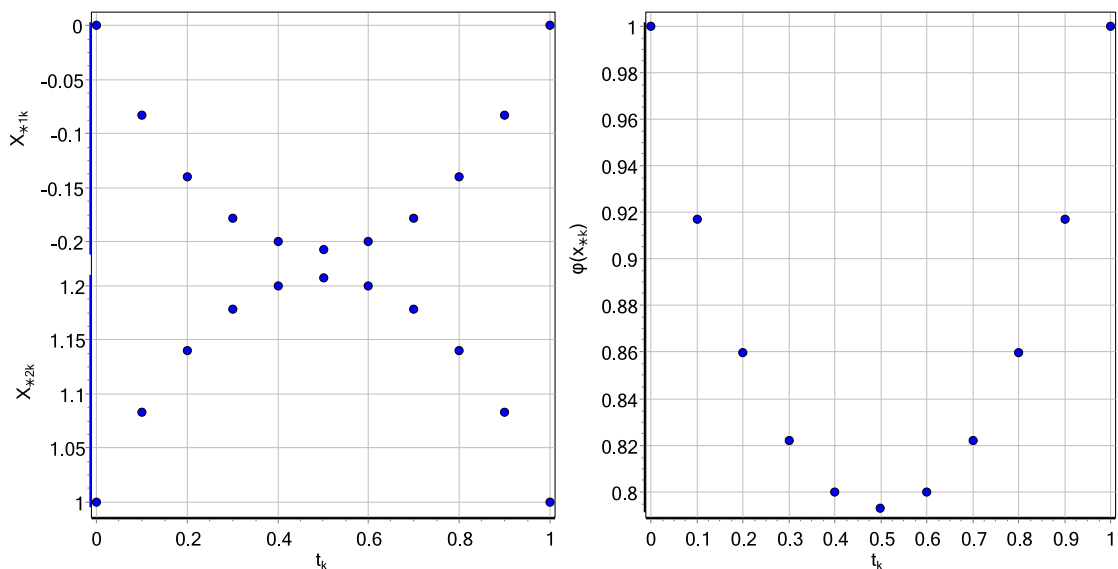


Рис. 5. – Динамика элементов минимизирующего вектора $\mathbf{x}_{*k} = \begin{bmatrix} x_{*1k} & x_{*2k} \end{bmatrix}$ и соответствующее изменение значений минимума линейного функционала

$$\varphi(\mathbf{x}_{*k}) = \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{x}_{*k}$$

Для рассмотренного примера нетрудно получить геометрическую интерпретацию. Изображения линейного многообразия $A\mathbf{x}_k = x_{1k} + x_{2k} = 1$, шара $(\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k)^T (\mathbf{x}_k - \mathbf{C}_k) \leq 1$, допустимой области D , точки максимума \mathbf{x}^* и минимума \mathbf{x}_* для двух значений вектора допустимых программных движений $\mathbf{C}_k = [0 \ 0]^T \in \mathbf{R}^2$ и $\mathbf{C}_k = [0,4 \ 0,4]^T \in \mathbf{R}^2$ показаны на рисунке 6.

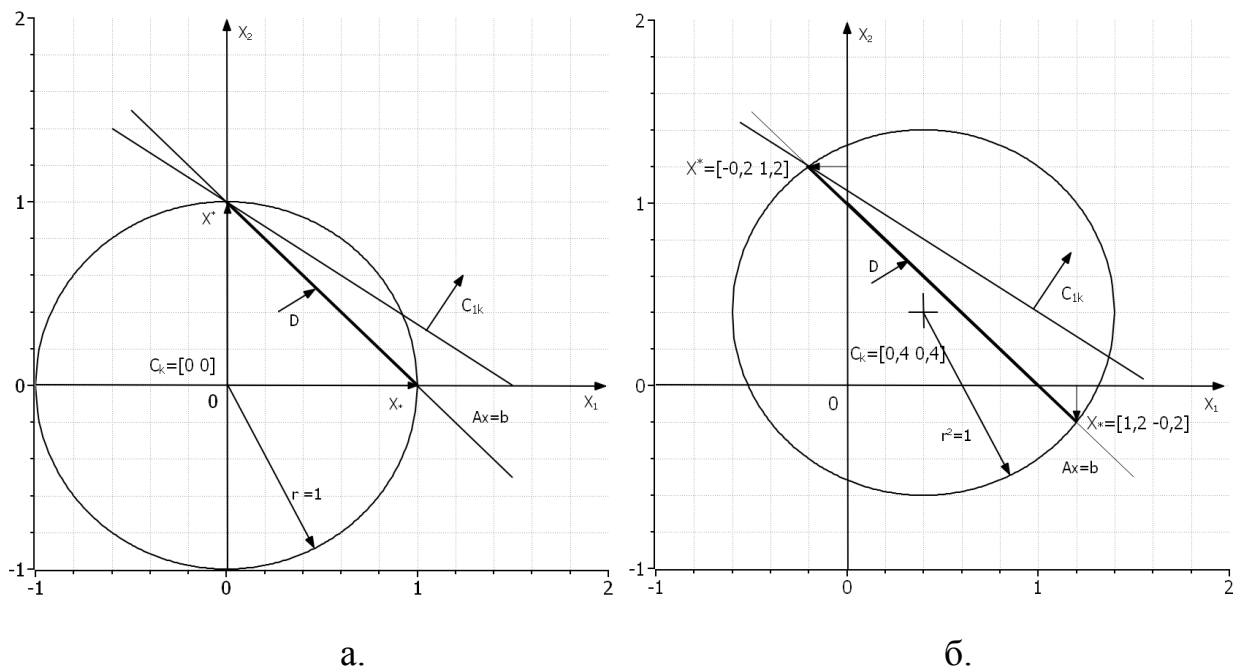


Рис. 6. – Геометрическая интерпретация задач минимизации и максимизации для двух значений вектора допустимых программных движений

$$\text{а. } \mathbf{C}_k = [0 \ 0]^T \in \mathbf{R}^2, \text{ б. } \mathbf{C}_k = [0,4 \ 0,4]^T \in \mathbf{R}^2$$

Из рисунка 6 видно, что векторы \mathbf{x}_* и \mathbf{x}^* , обеспечивающих минимум и максимум линейного функционала $\varphi(\mathbf{x}_k) = \mathbf{C}_{1k}^T \mathbf{x}_k$ имеют значения:

$$\text{а. } \mathbf{C}_k = [0 \ 0] \in \mathbf{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}^* = [0 \ 1] \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}^*) = 2; \\ \mathbf{x}_* = [1 \ 0] \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}_*) = 1. \end{cases}$$

$$\text{б. } C_k = [0,4 \quad 0,4] \in \mathbf{R}^2 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x}^* = [-0,2 \quad 1,2] \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}^*) = 2,2; \\ \mathbf{x}_* = [1,2 \quad -0,2] \Rightarrow \varphi(\mathbf{x}_*) = 0,8. \end{cases}$$

Указанные значения векторов \mathbf{x}_* и \mathbf{x}^* совпадают со значениями, вычисленными в этих точках с помощью проекционного оператора (10), приведенными на рисунках 4 и 5.

Выводы

В статье синтезирован проекционный оператор решения задач минимизации и максимизации линейного функционала с ограничениями-равенствами и ограничениями-неравенствами на вектор допустимых программных движений. Для синтезированного проекционного оператора аналитически определены граничные значения множителя Лагранжа. Вычислительный эксперимент и геометрическая интерпретация, решаемой в качестве примера задачи, проиллюстрировали корректность полученного оператора.

Синтезированный проекционный оператор конечномерной оптимизации дополняет ранее полученные результаты в области оптимальной стабилизации программных движений.

Литература

1. Полак Э., Численные методы оптимизации. Единый подход, пер. с англ., М., 1974. 376 с.
2. Мухачева Э. А., Рубинштейн Г. Ш. Математическое программирование. Наука. Сибирское отделение, 1977. 320 с.
3. Козлов В. Н., Системный анализ, оптимизация и принятие решений. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. 244 с.
4. Dutta J., Pandit T. Algorithms for simple bilevel programming // Bilevel Optimization: Advances and Next Challenges. 2020. pp. 253-291.

5. Taylor, A., Drori, Y. An optimal gradient method for smooth strongly convex minimization. *Math. Program.* 199, 2023. pp. 557–594.
 6. Giang-Tran, KH., Ho-Nguyen, N. & Lee, D. A projection-free method for solving convex bilevel optimization problems. *Math. Program.* 2024. URL: link.springer.com/article/10.1007/s10107-024-02157-1
 7. Козлов В.Н. Проекционный метод синтеза ограниченных оптимальных управлений динамических систем энергетики. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та., 2019. 161 с.
 8. Ефремов А. А. Структурно-инвариантный оператор решения задач стабилизации программных движений сложной динамической системы с ограничениями // Инженерный вестник Дона. 2024. № 10. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2024/9482.
 9. Ефремов А. А., Козлов В. Н. Метод синтеза локально допустимых ограниченных управлений для стабилизации программных движений динамических объектов. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 4, с. 47–55.
 10. Зубов В. И. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Ленинград: Судостроение, 1966. 352 с.
 11. Новиков Д. А. Классификации систем управления // Анализ и синтез систем управления. 2019. № 4. С. 27–42.
 12. Елсуков В.С., Лачин В.И., Демидов О. Ю.. Управление ограниченно неопределенными по состоянию и управлению нелинейными объектами // Инженерный вестник Дона. 2018. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5080.
 13. Alekseev A., Stukonog S. An algorithm for constructing an optimal ship's path with elements of the ship's program motion systems on the course. *Transp. Bus. Russ.*, 2022. № 2. pp. 217–221.
-

14. Li T., Ren H., Li C. Intelligent electric vehicle trajectory tracking control algorithm based on weight coefficient adaptive optimal control // Trans. Inst. Meas. Control. 2023. pp. 1-17.

15. Карташов Б. А., Шабаетв Е. А., Козлов О. С., Щекатуров А. М. SimInTech: среда динамического моделирования технических систем. М.: ДМК Пресс, 2017, 424 с.

References

1. Polak E., Chislennyye metody optimizatsii. Yedinyy podkhod, per. s angl. [Numerical methods of optimization. Unified approach, translated from English], Moskva, 1974. 376 p.

2. Mukhacheva E. A., Rubinstein G. Sh. Matematicheskoye programmirovaniye [Mathematical programming]. Nauka. Sibirskoye otdeleniye, 1977. 320 p.

3. Kozlov V. N. Systems analysis, optimization and decision making. St. Petersburg: Publishing house of the Polytechnic University, 2011. 244 p. [Systems analysis, optimization and decision making]. Sankt-Peterburg: Izd-vo Politehn. un-ta., 2011. 244 p.

4. Dutta J., Pandit T. Bilevel Optimization: Advances and Next Challenges. 2020. pp. 253-291.

5. Taylor, A., Drori, Y. Math. Program. 199, 2023. pp. 557–594.

6. Giang-Tran, KH., Ho-Nguyen, N. & Lee, D. Math. Program. 2024. URL: link.springer.com/article/10.1007/s10107-024-02157-1

7. Kozlov V. N. Proyektzionnyy metod sinteza ogranichennykh optimal'nykh upravleniy dinamicheskikh sistem energetiki [Projection method for the synthesis of bounded optimal controls of dynamic energy systems]. SPb, Izd-vo Politehn. un-ta., 2019, 161 p.



8. Efremov A. A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2024. № 10. URL: vdon.ru/ru/magazine/archive/n9y2024/9482.
9. Efremov A. A., Kozlov V. N. Informacionno-upravlyayushchie sistemy, 2023, no. 4, pp. 47–55.
10. Zubov V. I. Teoriya optimal'nogo upravleniya sudnom i drugimi podvizhnymi ob"yektami [Theory of optimal control of a vessel and other moving objects]. Leningrad: Sudostroenie, 1966. 352 p.
11. Novikov D. A. Analiz i sintez sistem upravleniya. 2019. No. 4. pp. 27–42.
12. Elsukov B. C., Lachin V. I., Demidov O. Yu. Inzhenernyj vestnik Dona. 2018. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5080.
13. Alekseev A., Stukonog S. Transp. Bus. Russ., 2022. № 2. pp. 217–221.
14. Li T., Ren H., Li C. Trans. Inst. Meas. Control. 2023. pp. 1-17.
15. Kartashov B. A., Shabaev E. A., Kozlov O. S., Shchekaturov A. M. SimInTech: sreda dinamicheskogo modelirovaniya tekhnicheskikh sistem [SimInTech: environment for dynamic simulation of technical systems]. M.: DMK Press, 2017, 424 p.

Дата поступления: 25.10.2024

Дата публикации: 10.12.2024