

## Расчёт железобетонной арки с учётом ползучести бетона

*А.А. Аваков, А.С. Чепурненко, С.В. Литвинов*

*Ростовский государственный строительный университет*

**Аннотация:** В работе получены основные уравнения для железобетонного элемента, испытывающего действие изгибающего момента и продольной силы, с учетом ползучести бетона. На основе данных уравнений исследуется напряженно–деформированное состояние железобетонной статически определимой трехшарнирной арки. При расчетах используется вязкоупругая модель. Рассматривается прямоугольное поперечное сечение с симметричным армированием. Показано, что в результате ползучести происходит перераспределение напряжений между арматурой и бетоном.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, ползучесть бетона, вязкоупругость, железобетонная арка, напряженно–деформированное состояние.

Железобетонные арки находят широкое применение в качестве стропильных конструкций, перемычек, в конструкциях мостов, покрытий промышленных зданий. Отличительной особенностью данных конструкций является то, что при правильно выбранном очертании возникающие в них изгибающие моменты малы, что отвечает специфике бетона — материала, плохо работающего на растяжение. Расчёт железобетонных арок, как правило, ведётся исключительно в упругой постановке. Однако для бетона характерна явно выраженная и развивающаяся даже в обычных эксплуатационных условиях ползучесть, которой ни в коем случае нельзя пренебрегать. В настоящей статье рассматривается методика расчета железобетонных арок с учетом ползучести бетона.

Так как арки являются брусками малой кривизны, то их расчёт можно вести по формулам для внецентренно сжатых железобетонных стержней. Рассмотрим железобетонный элемент, испытывающий действие изгибающего момента и продольной силы. Расчётная схема, а также поперечное сечение показаны на рис. 1. Положительными будем считать растягивающие напряжения.

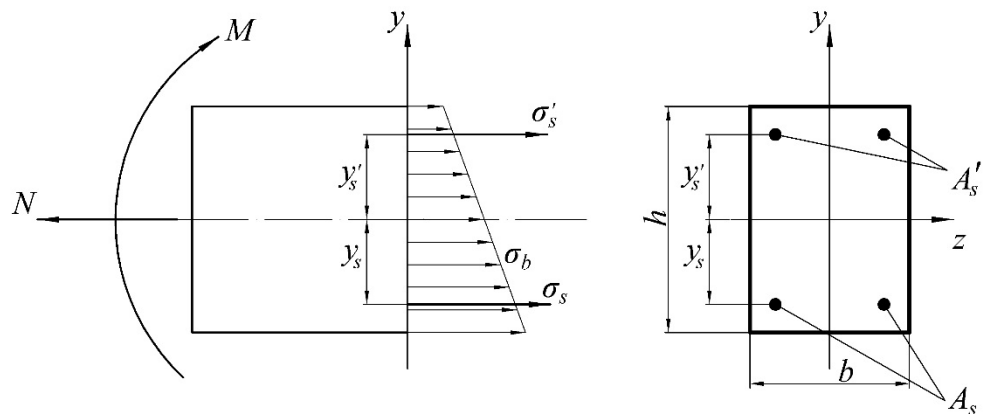


Рис.1. — К расчёту железобетонного элемента

Полная деформация бетона в соответствии с гипотезой плоских сечений представляет собой сумму осевой деформации  $\varepsilon_0$  и деформации, обусловленной изменением кривизны:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_0 - y\chi, \quad (1)$$

где  $\chi = \frac{d^2v}{dx^2}$  — кривизна стержня.

Из условия совместности работы арматуры и бетона запишем выражения для деформаций арматуры:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_0 + y_s\chi, \quad \varepsilon'_s = \varepsilon_0 - y'_s\chi. \quad (2)$$

Расстояния  $y_s$  и  $y'_s$  подставляются в формулу (2) по абсолютному значению.

Согласно модели вязкоупругого тела, полная деформация бетона — это сумма упругой деформации  $\varepsilon_b^{el}$  и деформации ползучести  $\varepsilon_b^*$  [1]:

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b} + \varepsilon_b^*. \quad (3)$$

Из (3) напряжения в бетоне запишутся в виде:

$$\sigma_b = E_b(\varepsilon_b - \varepsilon_b^*) = E_b(\varepsilon_0 - y\chi - \varepsilon_b^*). \quad (4)$$

Напряжения в арматуре определяются следующим образом:

$$\sigma_s = E_s\varepsilon_s = E_s(\varepsilon_0 + y_s\chi), \quad \sigma'_s = E_s\varepsilon'_s = E_s(\varepsilon_0 - y'_s\chi). \quad (5)$$

Запишем уравнение суммы моментов относительно оси z:

$$-M + \sigma_S A_S y_S - \sigma'_S A'_S y'_S - \int_A \sigma_b y dA = 0. \quad (6)$$

Составив сумму проекций всех сил на продольную ось стержня, получим:

$$N = \sigma_S A_S + \sigma'_S A'_S + \int_A \sigma_b dA. \quad (7)$$

Подставив (4) и (5) в (6), для случая симметричного армирования ( $A_S = A'_S$ ,  $y_S = y'_S$ ) получим:

$$\chi = \frac{1}{EI_{red}} \left( M - E_b \int_A \varepsilon_b^* y dA \right), \quad (8)$$

где  $EI_{red} = E_S I_S + E_b I_b$  — приведённая изгибная жёсткость поперечного сечения;  $I_S = E_S [A_S y_S^2 + A'_S (y'_S)^2]$ ;  $I_b = \frac{bh^3}{12}$ .

Величина  $\varepsilon_0$  находится из уравнений (4), (5), (7):

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{EA_{red}} \left( N + E_b \int_A \varepsilon_b^* dA \right), \quad (9)$$

где  $EA_{red} = E_S (A_S + A'_S) + E_b A_b$  — приведённая жёсткость поперечного сечения при осевом растяжении (сжатии).

Уравнения (4), (5), (8), (9) могут использоваться для расчёта с учётом ползучести статически определимых арок. На первом этапе выполняется статический расчёт — определяются внутренние силовые факторы  $M$  и  $N$ . В статически определимых системах при постоянных внешних нагрузках они не зависят от времени. Поперечное сечение по высоте разбивается на  $m$  частей  $\Delta y$ , а интервал времени на  $n$  шагов  $\Delta t$ . Для заданных сечений в каждой точке вычисляются напряжения в бетоне без учёта ползучести. Если закон ползучести задан в дифференциальной форме, то по вычисленным напряжениям можно определить скорости роста деформаций ползучести

$\frac{\partial \varepsilon_b^*}{\partial t}$ , а также деформации ползучести в момент времени  $t + \Delta t$  при помощи линейной аппроксимации [1, 3–6, 8–10]:

$$\varepsilon_b^*(t + \Delta t) = \varepsilon_b^*(t) + \frac{\partial \varepsilon_b^*}{\partial t} \Delta t.$$

Был выполнен расчёт трёхшарнирной круговой арки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q$ . Расчётная схема представлена на рис. 2.

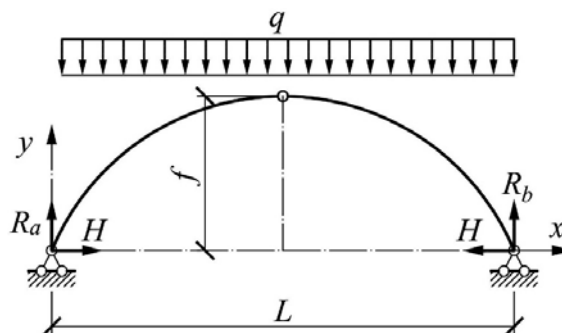


Рис. 2. — Расчётная схема арки

Уравнение оси арки, очерченной по окружности:

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2} - x\right)^2} - R + f; \quad R = \frac{f}{2} + \frac{L^2}{8f}; \quad \sin \varphi = \frac{L - 2x}{2R};$$

$$\cos \varphi = \frac{y + R - f}{R}. \quad (10)$$

Внутренние усилия в сечении  $K$  арки вычисляются по формулам:

$$M_K = M_K^\delta - Hy_K; \quad N_K = -(Q_K^\delta \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K), \quad (11)$$

где  $M_K^\delta$ ,  $Q_K^\delta$  — момент и поперечная сила в сечении  $K$  в балке с аналогичным пролетом и нагрузкой.

$$\text{В нашем случае } M_K^\delta = \frac{qx}{2}(L - x); \quad Q_K^\delta = \frac{q}{2}(L - 2x); \quad H = \frac{qL^2}{8f}.$$

Задача была решена при следующих исходных данных:  $q = 15$  кН/м,  $L = 16$  м,  $f = 3.2$  м,  $b = 20$  см,  $h = 40$  см,  $\tau_0 = 28$  сут,  $E_b(\tau_0) = 3 \cdot 10^4$  МПа

коэффициент армирования  $\mu = \frac{A_{S,общ}}{A_b} = 0.02$ ,  $y_s = y'_s = 15$  см,  $E_s = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Учитывалось старение бетона, т. е. возрастание его модуля упругости с течением времени. Зависимость модуля упругости бетона от времени принималась в виде:

$$E_b(t) = E_b(\tau_0) \cdot [b_1 + (1 - b_1)e^{-b_2(t-\tau_0)}], \quad b_1 = 1.282, \quad b_2 = -0.019.$$

При расчёте использовалось уравнение вязкоупругой модели наследственного старения бетона, которое имеет вид [7]:

$$\varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_b(t)}{E_b(t)} - \int_{\tau_0}^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau; \quad C(t, \tau) = C \frac{e^{\alpha t} - e^{\alpha \tau}}{e^{\alpha t} - 1} + B(e^{-\gamma \tau} - e^{-\gamma t}).$$

Для расчёта данное уравнение было представлено в дифференциальной форме.

Значения реологических констант:  $\alpha = 0.032$ ,  $C = 3.77 \cdot 10^{-5}$  МПа<sup>-1</sup>,  $B = 5.68 \cdot 10^{-5}$  МПа<sup>-1</sup>,  $\gamma = 0.062$ .

На рис. 3 представлен график изменения напряжений в арматуре в зависимости от  $x$  и  $t$ . Верхней сетчатой поверхности соответствуют напряжения  $\sigma'_s$  в арматуре у верхней грани; нижней закрашенной — напряжения  $\sigma_s$  в арматуре у нижней грани. Рис. 4 — изменение напряжений в бетоне в зависимости от  $x$  и  $t$ . Верхней поверхности соответствуют напряжения при  $y = h / 2$ , нижней — при  $y = -h / 2$ . Из рис. 3–4 видно, что вследствие ползучести бетона напряжения в арматуре по абсолютной величине возрастают, а в бетоне убывают. Наиболее существенное перераспределение происходит в точках, где изгибающие моменты максимальны ( $x \approx 2.1$  м и  $x \approx 13.9$  м).

Представленная задача была также решена методом конечных элементов. Система линейных алгебраических уравнений МКЭ с учётом ползучести имеет вид [2]:

$$[K]\{U\} = \{F_q\} + \{F^*\},$$

где  $\{U\}$  — вектор узловых перемещений;  $[K]$  — матрица жёсткости;  $\{F_q\}$  — вектор внешних узловых нагрузок;  $\{F^*\}$  — вклад деформаций ползучести в вектор нагрузки.

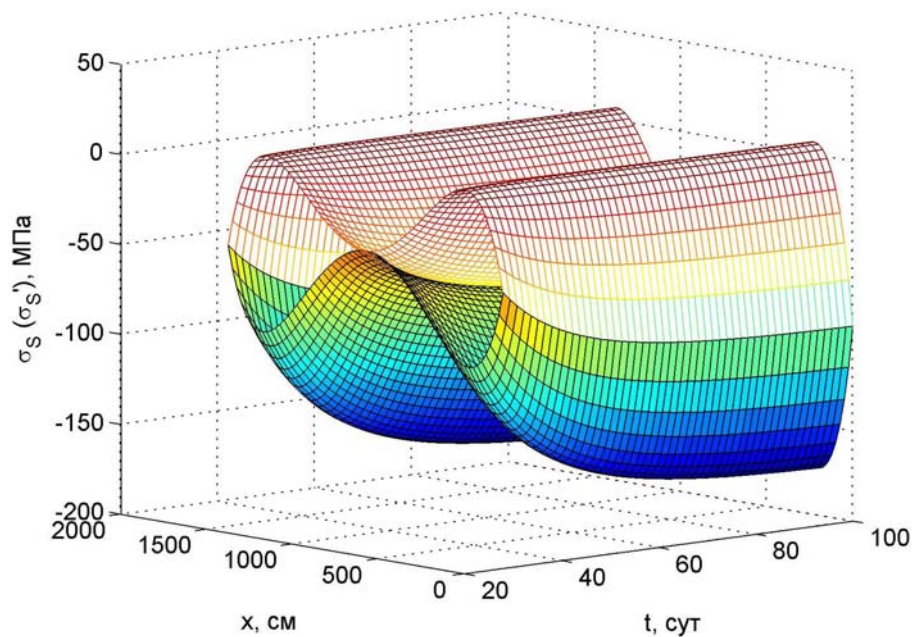


Рис. 3. Изменение напряжений в арматуре

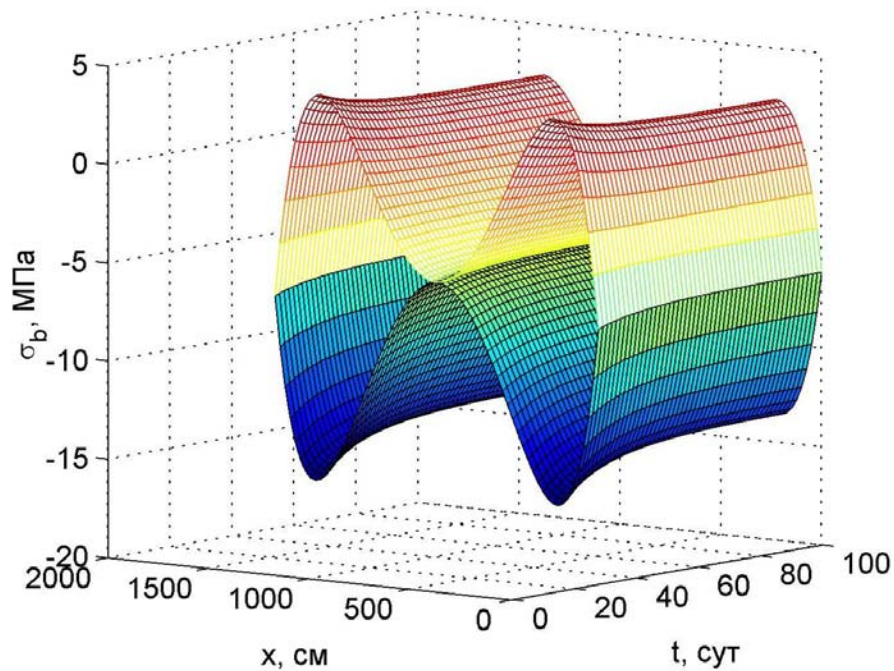


Рис. 4. Изменение напряжений в бетоне при  $y = h / 2$  и  $y = - h / 2$

В таблице № 1 представлено сравнение напряжений в бетоне и арматуре у нижней грани при  $x = 2.1$  м в различные моменты времени, полученных численно–аналитически методом (далее — ЧАМ), а также численно с использованием МКЭ.

Из таблицы видно, что результаты практически совпадают, что свидетельствует о достоверности разработанной методики.

Таблица № 1

Сравнение результатов численно–аналитического расчета с МКЭ

t, сут		30	40	50	60	70	80	90	100
$\sigma_x$ , МПа	ЧАМ	-15.84	-14.70	-14.16	-13.87	-13.72	-13.64	-13.59	-13.56
	МКЭ	-15.81	-14.67	-14.17	-13.87	-13.71	-13.62	-13.57	-13.54
$\sigma_y$ , МПа	ЧАМ	-102.8	-137.7	-154.6	-162.7	-167.8	-170.4	-172.1	-173.2
	МКЭ	-102.6	-137.4	-154.3	-163.1	-168.9	-170.3	-171.9	-172.8

### Литература

1. Козельская М.Ю., Чепурненко А.С., Литвинов С.В. Применение метода Галёркина при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести // Инженерный вестник Дона, 2013, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714.

2. Козельская М.Ю., Чепурненко А.С., Языев С.Б. Расчет на устойчивость сжатых полимерных стержней с учетом физической нелинейности методом конечных элементов // Наукоедение: электронный журнал. №3. 2013 URL: naukovedenie.ru/PDF/62trgsu313.pdf.

3. Кулинич И.И., Клименко Е.С., Языев С.Б., Литвинов С.В.. Продольный изгиб полимерного стержня с учетом начальных несовершенств // «Строительство-2011»: материалы Международной научно-практической конференции. Ростов-н/Д: РГСУ, 2011. С. 159–161.

4. Литвинов С.В., Клименко Е.С., Кулинич И.И., Языева С.Б.. Расчет на устойчивость полимерных стержней с учетом деформаций ползучести и



начальных несовершенств // Инженерный Вестник Дона. №2. 2011. URL: ivdon.ru/magazine/latest/n2y2011/418.

5. Литвинов С.В., Клименко Е.С., Кулинич И.И. и др. Расчет на устойчивость стержней из ЭДТ–10 при различных вариантах закрепления // Инженерный Вестник Дона. №2. 2011. URL: ivdon.ru/magazine/latest/n2y2011/415.

6. Литвинов С.В., Клименко Е.С., Кулинич И.И., Языева С.Б. Устойчивость полимерных стержней при различных вариантах закрепления // Вестник МГСУ. №2. т.2. 2011. С.153–157.

7. Тамразян А.Г. Механика ползучести бетона: монография / А. Г. Тамразян, С. Г. Есян. Москва: МГСУ, 2012. 490 с.

8. Чепурненко А.С., Андреев В.И., Языев Б.М. Энергетический метод при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести // Вестник МГСУ. №1. 2013, с. 101–108.

9. Vladimir I. Andreev, Anton S. Chepurnenko, Batyr M. Yazyev. Energy Method in the Calculation Stability of Compressed Polymer Rods Considering Creep // Advanced Materials Research Vols. 1004–1005 (2014) pp. 257–260. Trans Tech Publications, Switzerland.

10. Vladimir I. Andreev, Batyr M. Yazyev, Anton S. Chepurnenko. On the Bending of a Thin Plate at Nonlinear Creep//Advanced Materials Research Vol. 900 (2014) pp. 707–710. Trans Tech Publications, Switzerland.

### References

1. Kozel'skaya M.Yu., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714.

2. Kozel'skaya M.Yu., Chepurnenko A.S., Yazyev S.B. Naukovedenie: elektronnyy zhurnal. №3. 2013 URL: naukovedenie.ru/PDF/62trgsu313.pdf.





3. Kulinich I.I., Klimenko E.S., Yazyev S.B., Litvinov S.V. «Stroitel'stvo-2011»: materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Rostov-n/D: RGSU, 2011. pp. 159–161.
4. Litvinov S.V., Klimenko E.S., Kulinich I.I., Yazyeva S.B. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). №2. 2011. URL: [ivdon.ru/magazine/latest/n2y2011/418](http://ivdon.ru/magazine/latest/n2y2011/418).
5. Litvinov S.V., Klimenko E.S., Kulinich I.I. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). №2. 2011. URL: [ivdon.ru/magazine/latest/n2y2011/415](http://ivdon.ru/magazine/latest/n2y2011/415).
6. Litvinov S.V., Klimenko E.S., Kulinich I.I., Yazyeva S.B. Vestnik MGSU. №2. t.2. 2011. pp. 153–157.
7. Tamrazyan A.G. Mekhanika polzuchesti betona [Mechanics creep of concrete]. A. G. Tamrazyan, S. G. Esayan. Moskva: MGSU, 2012. 490 p.
8. Chepurnenko A.S., Andreev V.I., Yazyev B.M. Vestnik MGSU. №1. 2013, pp. 101–108.
9. Vladimir I. Andreev, Anton S. Chepurnenko, Batyr M. Yazyev. Advanced Materials Research Vols. 1004–1005 (2014) pp. 257–260. Trans Tech Publications, Switzerland.
10. Vladimir I. Andreev, Batyr M. Yazyev, Anton S. Chepurnenko. Advanced Materials Research Vol. 900 (2014) pp. 707–710. Trans Tech Publications, Switzerland.