

Моделирование очистки сточных вод на вертикальных фильтрах

Т.Н. Бобылева

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва

Аннотация: В работе рассматриваются принципы построения математической модели водоочистки на основе использования биологически активного слоя, бактерии которого поглощают вредные примеси, содержащиеся в воде. Приводится система уравнений, на основе которой строится модель водоочистки в простейшем элементе, представляющем собой стержень, покрытый биопленкой. Система уравнений представляет собой систему, включающую параболическое уравнение в трехмерной области и гиперболическое уравнение на части поверхности области, связанные между собой через краевое условие и потенциал в уравнении гиперболического типа. Далее проводится асимптотический анализ этой системы, позволяющий свести модель отдельного элемента к решению простого обыкновенного дифференциального уравнения. На этой основе предлагается модель работы всего устройства водоочистки, содержащего большое количество таких элементов.

Ключевые слова: водоочистка, биологически активный слой, асимптотический анализ решений в тонкой области, биопленка, математическая модель очистки загрязнений, система дифференциальных уравнений смешанного типа, оптимизация конструкций биофильтра, городские сточные воды.

Проблема очистки воды от нежелательных примесей имеет большое практическое значение. Она рассматривалась множеством авторов. В [1,2] представлено современное описание характеристик сточных вод, теория биологических процессов и их моделирования. В этих работах подчеркивается, что математические модели имеют решающее значение для современной экологической биотехнологии - как в исследованиях, так и в инженерной практике. В работе [3] проанализированы математические модели процессов, происходящих в сооружениях биологической очистки типа Моно, Герберта, Кенейла и других авторов. Качественный анализ краевой задачи, относящейся к модели биопленочного реактора, представлен в работе [4], выполнено математическое моделирование роста биопленок с использованием систем нелинейных уравнений в частных производных. В [5-7] рассмотрены процессы электрохимической коагуляции и контактного фильтрования для осветления и обеззараживания воды реки Дон,

биологическая очистка на очистных сооружениях городов Нижнего Поволжья, изложены результаты исследований, направленных на использование отработанного активного ила в качестве вторичного сырья для получения адсорбционного материала, а также применение аэрационно-осветительной установки в процессе биологической очистки сточных вод.

Описание биопленок дано в [8], указаны направления для их дальнейшего математического моделирования. В [9] реализована математическая модель утилизации субстрата микроорганизмами биопленки на поверхности сферической и стержневой (волокнуистой) загрузки фильтра. Дано описание частичной апробации результатов теоретических исследований в лабораторных условиях на фильтрах с различными типами загрузки.

В настоящей работе предлагается модель очистки воды с помощью биологически активных пленок, в которых размножаются и погибают бактерии. В специальном резервуаре цилиндрической формы высоты около одного метра и диаметром около 20 см. помещаются параллелепипеды, состоящие из тонких спрессованных полимерных волокон. Объем такого параллелепипеда около 15–20 кубических сантиметров, отдельные волокна можно рассматривать как стержни длины порядка 1 см. Тонкая биопленка покрывает поверхность каждого такого стержня, ее толщина около десятой доли миллиметра. Вода поступает на верхнее сечение очистительного устройства, далее каплями стекает по упомянутым стержням, смачивая биопленку. Нежелательные примеси в воде являются питанием для бактерий, и поэтому происходит проникновение примесей через пленку, интенсивность которого зависит от концентраций бактерий и нежелательных примесей на границе пленки. На скорость поглощения влияет также средняя скорость воды, которая сочится по поверхности биопленки. Таким образом, стержень длины l (около сантиметра) представляет собой элементарный элемент устройства водоочистки. Всего таких элементов в цилиндре насчитывается

несколько миллионов. Опишем основные принципы математической модели, которую мы используем в настоящей работе.

Мы заменяем структуру очищающих элементов на совокупность стержней длины l , покрытых очищающим слоем толщины δ , к которому примыкает бесконечно тонкий слой, по которому транспортируются воздух и вода с нежелательными примесями. Поглощающий очистительный слой (биопленка) получает в свой объем примеси из примыкающей к нему поверхности со скоростью, зависящей от концентраций бактерий на поверхности биопленки и примесей в очищаемой жидкости на этой же поверхности, например, пропорциональной разности концентраций в очищающем слое и на поверхности. Внутри очищающего слоя уравнение, описывающее эволюцию концентрации бактерий со временем, представляет собой уравнение диффузии с нелинейным членом, который моделирует поглощение вредных примесей бактериями. При малых концентрациях этот закон можно считать линейным, при увеличении концентрации кривая зависимости скорости поглощения примесей выходит на константу, поскольку при высокой концентрации бактерий они начинают «мешать» друг другу. Иногда закон, который формализует математически такое поведение бактерий в литературе, называют законом Моно.

Поступление нежелательных примесей моделируется условием контакта с прилегающей к биопленке поверхностью, по которой вода с нежелательными примесями, смешанная с воздухом, транспортируется вдоль очищающего слоя. Поле скоростей транспортировки считается заранее заданным. Его величина рассчитывается для каждого очищающего элемента, исходя из общего расхода загрязненной жидкости и наклона элемента к горизонтальной плоскости. Уравнение движения смеси: вода-воздух-вредные примеси является уравнением гиперболического типа (уравнением переноса) с потенциалом, описывающим уход вредных примесей в очищающий слой.

Это величина ухода вредных примесей из воды, определяющая потенциал в данном уравнении, зависит от концентраций на поверхности биоактивного слоя бактерий и вредных примесей. Система, описывающая поглощение вредных примесей в одном элементе, представляет совокупность уравнения диффузии в трехмерной цилиндрической области и уравнения переноса на примыкающей цилиндрической двумерной поверхности. Такая задача не имеет аналитического решения. Однако очевидно, что можно построить расчетную программу. После расчета степени поглощения одного очищающего элемента в зависимости от концентрации поступающей примеси, скорости транспортировки, толщины очищающего слоя, закона поглощения вредных примесей бактериями и зависимости перетока вредных примесей от разности концентраций в очищающем слое и на транспортной поверхности нетрудно будет построить модель всего фильтра, состоящего из тысяч таких элементов.

Весь цилиндрический резервуар разбивается на отдельные слои по высоте, и строится вычислительная программа, позволяющая рассчитать изменение концентрации на каждом из слоев, сверху донизу, пользуясь моделью элементарного очищающего элемента.

Система уравнений для математической модели.

Пусть концентрация бактерий в биопленке и концентрация примесей на границе биопленки зависит только от радиальной переменной r и переменной z по длине стержня. Зависимостью от угловой переменной мы пренебрегаем. Введем следующие обозначения. Ω_0^ε – один стержень внутри кубика (одно волокно, из которых состоит кубик), ε – диаметр этого стержня, Ω_1^ε – поверхностный слой толщины δ на Ω_0^ε (биопленка), S_ε – часть боковой границы Ω_1^ε , не контактирующая с Ω_0^ε , Γ_ε – остальная часть боковой границы Ω_1^ε , $C_\varepsilon(\vec{x}, t)$ – концентрация примесей в Ω_1^ε , $\vec{x} = (r, z)$, t – время,

$M_\varepsilon(\vec{x}, t)$ – концентрация примесей на S_ε , $\vec{v}(\vec{x}, t)$ – вектор скорости, направленный по касательной к поверхности S_ε . Обозначим также через D_1, D_2 верхнюю и нижнюю грани рассматриваемого стержня. Функции C_ε и M_ε должны удовлетворять следующим уравнениям в области Ω_1^ε и на S_ε :

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_\varepsilon &= D \cdot \Delta C_\varepsilon + F(t, C_\varepsilon) \text{ в } \Omega_1^\varepsilon \\ \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial n} \Big|_{\Gamma_\varepsilon} &= 0, \quad \frac{\partial C_\varepsilon}{\partial n} \Big|_{S_\varepsilon} = -k_1(M_\varepsilon - C_\varepsilon) \Big|_{S_\varepsilon}, \quad C_\varepsilon \Big|_{t=0} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Кроме того, на D_1, D_2 должно быть также выполнено однородное условие Неймана. Данное в (1) уравнение описывает диффузию бактерий в слое с гибелью бактерий при увеличении их концентрации. Оператор Δ – это оператор Лапласа в цилиндрических переменных, r – радиальная переменная.

Нелинейная функция $F(t, C_\varepsilon)$ моделирует упомянутый выше закон Моно, D – коэффициент диффузии, $\frac{\partial C_\varepsilon}{\partial n}$ – производная по внешней нормали n к поверхности S_ε . Следующая система

$$\left. \begin{aligned} \dot{M}_\varepsilon &= \vec{v} \cdot \nabla M_\varepsilon + k_2(C_\varepsilon - M_\varepsilon) \\ M_\varepsilon \Big|_{\partial S'_\varepsilon} &= C_0(\vec{x}), \quad M_\varepsilon \Big|_{t=0} = C_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

описывает перенос примесей, содержание которых мы хотим уменьшить, по поверхности S_ε с переходом примесей в Ω_1^ε . Уничтожаемые примеси служат для бактерий питанием. Через $F(t, C_\varepsilon)$ мы обозначили нелинейную, вообще говоря, функцию, описывающую уменьшение количества бактерий в биопленке при их высокой концентрации, $\partial S'_\varepsilon$ – часть края S_ε на верхнем торце стержня, где поле \vec{v} “входит” в него. В данном конкретном случае $\nabla M_\varepsilon = \frac{dM_\varepsilon}{dz}$, так как на поверхности S_ε $r = \text{const}$.

Нетрудно построить прямую разностную схему для поставленной краевой задачи. Однако здесь следует отметить, что данная система не имеет

определенного типа, она состоит из двух уравнений, первое из которых – параболическое, а второе – гиперболическое. Кроме того, эти системы заданы в областях различной размерности, система (1) – в трехмерной области, а система (2) – двумерной. Математически это новый и довольно интересный объект. Мы предполагаем, что стационарный режим, на который выходит решение при больших значениях времени, не зависит от начального распределения плотности бактерий, но зависит от плотности примесей, попадающих на верхнюю часть водоочистительного устройства.

В постановке задачи, приведенной в данном пункте, зависимость в краевых условиях от величины концентрации бактерий и вредных примесей – линейная. В этом случае можно исключить из системы величину плотности примесей, решая линейное уравнение для плотности примесей M при заданной величине плотности концентрации бактерий C и подставляя полученное выражение в краевое условие для функции C . Оно является нелокальным условием последствия интегрального типа, причем на поток через границу будут влиять прошлые значения концентрации в различных пространственных точках. Это – интересная с математической точки зрения постановка краевой задачи с интегральным последствием. В настоящее время подобные задачи еще в должной степени не изучены.

Чтобы обойти эти математические сложности, упростим нашу модель, используя дополнительное предположение – длина отдельного очищающего элемента значительно больше (примерно в 100 раз) толщины биологически активной пленки. Это предположение действительно выполняется для рассматриваемого нами в данной работе способа водоочистки. Тогда можно применить асимптотический метод анализа решений краевых задач в так называемых «тонких» областях [10]. С помощью этого метода при предельном переходе по толщине уменьшается размерность пространства независимых переменных и рассматриваемая нами краевая задача для

стационарного режима распределения примесей сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Единственной независимой переменной является переменная по направлению вдоль стержня. Такое уравнение решается численно почти мгновенно на современной ЭВМ и поэтому решение нескольких миллионов таких уравнений, моделирующих отдельные простейшие элементы водоочистки, становится простой задачей. Начальные условия для таких уравнений моделируются в зависимости от слоя по высоте, на котором находится такой элемент. А именно, разделим устройство водоочистки на слои толщиной примерно один сантиметр по высоте. Начальные условия для уравнений, соответствующих элементам водоочистки на верхнем слое определяются режимом поступления воды в водоочиститель, они задаются заранее. На других по высоте слоях начальные условия на верхней точке элемента будут определяться группой соседних с этой верхней точкой нижних точек элементов верхнего слоя. Каждый элемент верхнего слоя делит определенным образом, например, поровну, долю неочищенных еще им примесей (а это значения концентрации примесей на его нижнем конце) между входными верхними точками соседних элементов следующего (более низкого) по высоте слоя. Наклоны элементов водоочистки по отношению к вертикали можно моделировать как равномерно распределенные, а скорости перемещения смеси воды и воздуха по отдельным элементам выбирать в зависимости от наклона элемента к вертикальной оси.

Асимптотический переход по толщине водоочистительного элемента.

Опишем более детально процедуру предельного перехода по толщине пленки в исходной задаче, которая упрощает модель, сводя ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Построим для решения нашей системы в стационарном случае асимптотическое приближение по малому параметру $h = R - r_0$, характеризующему толщину стержня. Оказывается, что

первое приближение по параметру $h \rightarrow 0$ легко построить, и для него не существенна величина диффузии и потенциал в уравнении (4), а основную роль играет краевое условие на поверхности S . Роль коэффициентов диффузии проявляется только в следующем приближении по параметру h . Действительно, рассмотрим уравнение системы (4) в стационарном варианте (когда производные по времени равны нулю) с краевым условием

$$\left(\frac{\partial C}{\partial r} + k_1 C \right) \Big|_{r=R} = \Phi(x) \quad \text{на } S. \quad \text{Для } C(x,r) \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ имеет место}$$

асимптотическое приближение

$$C^{(1)}(x,r) = \frac{\Phi(x)}{k_1} - \frac{\Phi''(x)}{k_1} \cdot I(r), \quad L_r I(r) = 1, \quad \frac{\partial I}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0,$$

здесь L_r – радиальная компонента оператора Лапласа в цилиндрических координатах, $I(r)$ – вспомогательная функция, удовлетворяющая указанным выше условиям. Заметим, что для приближения $C^{(1)}$ краевое условие на S выполняется с точностью $O(h)$ порядка h , условие на Σ выполняется точно, условия на D_1, D_2 не выполняются, но площади D_1, D_2 являются величинами порядка $O(h)$, и поток через эти поверхности не окажет влияния на решение более, чем на величину $O(h)$. Уравнение для $C^{(1)}$ выполняется точно, мы считаем, что $F \equiv 0$. Слагаемое $\frac{\Phi''(x)}{k_1} \cdot I(r)$ в выражении для $C^{(1)}$ имеет порядок $O(h^2)$, поэтому

$$C^{(1)}(x,r) \approx \frac{\Phi(x)}{k} \quad (3)$$

с точностью $O(h)$. Таким образом, если в дифференциальное уравнение (2) подставить указанное приближенное значение (3) для $C(x,r)$, то для предлагаемого приближения при малой величине h компоненты решения

$M(x)$ из уравнения (2) получается простое обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dM}{dx} = -v^{-1}g \left[M(x), \frac{f(M(x))}{k_1} \right] \quad (4)$$

с начальным условием $M(0) = m_0$.

Здесь f , g – явно задаваемые функции, конкретный вид которых определяется исходной постановкой задачи. Если f и g – линейные функции, то уравнение (4) решается явно, а если f и g – функции общего вида, то оно быстро и с высокой точностью может быть решено на компьютере.

Выводы.

Таким образом, в данной работе предлагается модель процесса водоочистки с помощью биологически активных элементов. Такая модель может помочь при расчете параметров устройства водоочистки, так, чтобы достигалась определенная производительность, и одновременно уровень вредных примесей в воде на выходе из водоочистительного устройства не превосходил бы заданную величину. Данная модель может быть использована для решения оптимизационной задачи выбора различных параметров водоочистительного устройства с соответствующими ограничениями на производительность и качество водоочистки.

Литература

1. Henze M., Harremoes P., La Cour Jansen J., Arvin E. 2001 Wastewater Treatment Biological and Chemical Processes. Berlin: Springer, 2001. 422 p.
2. Boltz J. P., Morgenroth E., Sen D. Mathematical modelling of biofilms and biofilm reactors for engineering design // Water Science Technology. 2010. V. 62. № 8. pp. 1821–1836
3. Вавилин В.А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках. М.: Наука, 1983. 158 с.

4. D'Acunto B., Frunzo L. and Mattei M. Qualitative analysis of the moving boundary problem for a biofilm reactor model // *Math. Anal. Appl.* V. 438. pp. 474-491

5. Бреус С.А., Скрябин А.Ю., Олейник Р.А. Очистка природной воды для питьевых целей в период чрезвычайных ситуаций: электрохимическое коагулирование и контактное фильтрование // *Инженерный вестник Дона*, 2016, № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3881.

6. Москвичева Е.В., Войтюк А.А., Доскина Э.П., Игнаткина Д.О., Юрьев Ю.Ю., Щитов Д.В. Совершенствование технологии очистки городских сточных вод с использованием сорбента на основе избыточного активного ила // *Инженерный вестник Дона*, 2015, №2, ч.2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/2968.

7. Старовойтов С.В., Халил А.С. Применение аэрационно-осветительной установки в биологическом фильтре // *Инженерный вестник Дона*, 2017, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4641.

8. Klapper I., Dockery J. Mathematical description of microbial biofilms // *SIAM Rev.*, 2010, V. 52. №2. pp. 221–265

9. Олейник А.Я., Василенко Т.В., Рыбаченко С.А., Хамад И. А. Моделирование процессов доочистки хозяйственно-бытовых сточных вод на фильтрах // *Проблеми водопостачання, водовідведення та гідраліки*. 2006. №7. С. 85–97.

10. Назаров С.А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Новосибирск: Науч. кн., 2002. 406 с.

References

1. Henze M., Harremoës P., La Cour Jansen J., Arvin E. 2001. *Wastewater Treatment Biological and Chemical Processes*. Berlin: Springer, 2001. 422 p.

2. Boltz J. P., Morgenroth E., Sen D. *Water Science Technology*. 2010. V. 62 № 8. pp. 1821–1836

3. Vavilin V.A. Nelineynye modeli biologicheskoi ochistki i protsessov samoochischneniya v rekah [Non-linear models of biological treatment and self-cleaning processes in rivers]. Moscow: Nauka, 1983. 158 p.
4. D'Acunto B., Frunzo L. and Mattei M. Math. Anal. Appl. V. 438. pp. 474-491
5. Breus S.A., Skryabin A.Yu., Ole'ynik R.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2016, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2016/3881.
6. Moskvicheva E.V., Voytyuk A.A., Doskina E.P., Ignatkina D.O., Yuryev Yu.Yu., Schitov D.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2015, №2, part 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/2968.
7. Starovoytov S.V., Khalil A.S. Inzhenernyj vestnik Dona, 2017, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4641.
8. Klapper I., Dockery J. Mathematical description of microbial biofilms // SIAM Rev., 2010, V. 52. №2. pp. 221–265.
9. Olejnik A. Ya., Vasilenko T. V., Rybachenko S. A., Hamad I. A. Problemy vodopostacannya, vodovidvedennya ta gidravliki (Rus), 2006, №7. pp.85–97.
10. Nazarov S.A. Asimptoticheskaya teoriya tonkikh plastin i sterzney [Asymptotic Theory of Thin Plates and Rods]. 2004. Novosibirsk: Naych.kniga, 2002. 256 p.