

Расчёт плоских стержневых систем с переменным по длине модулем упругости методом конечных элементов в форме смешанного метода

Б.А. Тухфатуллин¹, Л.Е. Путеева¹, Ф.А. Красина²

¹*Томский государственный архитектурно-строительный университет*

²*Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники*

Аннотация: В статье предложен алгоритм расчёта плоских стержневых систем постоянного по длине поперечного сечения с переменным модулем упругости. Закон изменения модуля упругости может быть задан в явном виде или таблично. На основе метода конечных элементов в форме смешанного метода разработан специальный конечный элемент. Для вычисления элементов матрицы откликов и вектора грузовых коэффициентов используется процедура численного интегрирования. Приведены примеры расчёта консольных стержней в двух вариантах: с переменным по длине модулем упругости; и стержня, имеющего по длине три, пять и семь участков, выполненных из различных материалов. Приведено сравнение с результатами других авторов. Рассчитана плоская рама из четырёх конечных элементов с переменным модулем упругости.

Ключевые слова: смешанный метод, конечный элемент, переменный модуль упругости, матрица откликов.

Введение

В настоящее время в практике строительного проектирования широко используются программные комплексы, реализующие в качестве «решателя» метод конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений [1 – 3]. В программных продуктах ЛИРА САПР, SCAD OFFICE и др. для расчёта плоских стержневых систем используются конечные элементы (КЭ) постоянного по длине сечения [2] и линейно-переменного поперечного сечения в форме прямоугольника или составного двутавра [3]. Модуль упругости E задаётся либо в виде числа в согласованных единицах измерения, либо опосредованно выбором соответствующего материала из имеющейся базы данных. В последние десятилетия в инженерной практике начали широко применяться новые материалы, имеющие переменные по длине характеристики (плотность, пористость, модуль упругости). Связанные с ними методы расчёта приведены в [4 – 7]. Расчёт конструкций из подобных

материалов с использованием программных комплексов [2, 3] требует деления каждого стержня по длине на большое число КЭ, в пределах которых характеристики материалов являются постоянными. При дальнейшем использовании проектирующих систем этот подход является неудобным, так как требует объединения большого числа КЭ в единый конструктивный элемент. В случае быстро осциллирующих характеристик материала остаётся открытым вопрос о назначении необходимого числа разбиения на КЭ.

Цель исследования – разработка программно ориентированного алгоритма расчёта плоских стержневых систем с переменным по длине модулем упругости.

Объект исследования – плоская стержневая система, находящаяся в условиях одного нагружения, элементы которой сопрягаются между собой в узлах жёстко или шарнирно; очертания осей и условия опирания являются заданными.

Материалы и методы

В подавляющем большинстве программных комплексов, реализующих МКЭ для решения задач инженерного анализа в строительстве, данный метод используется в форме метода перемещений [1, 8]. В то же время рядом исследователей [9 – 11] развивается вариант МКЭ в форме смешанного метода. В предыдущих работах [12, 13] был предложен и программно реализован вариант МКЭ в форме смешанного метода, в том числе для расчёта плоских стержневых систем с элементами переменного по длине поперечного сечения. В работе [14] получены формулы для формирования матрицы откликов $[B^*]$ в местной системе координат и вектора грузовых коэффициентов $\{D\}$ для КЭ смешанного метода (рис. 1) с переменным по длине модулем упругости $E(x)$:

$$[B^*] = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{r}_{25} & \dot{r}_{26} \\ r_{31} & 0 & r_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{r}_{45} & \dot{r}_{46} \\ 0 & \dot{\delta}_{52} & 0 & \dot{\delta}_{54} & \delta_{55} & \delta_{55} \\ 0 & \dot{\delta}_{62} & 0 & \dot{\delta}_{64} & \delta_{65} & \delta_{66} \end{bmatrix}, \quad \{D\} = \begin{bmatrix} R_{x,H} \\ R_{y,H} \\ R_{x,K} \\ R_{y,K} \\ \Delta_H \\ \Delta_K \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где элементы матрицы $[B^*]$ и вектора $\{D\}$ вычисляются по формулам:

$$r_{11} = r_{33} = \frac{1}{\int_0^\ell \frac{dx}{E(x)A}}; \quad r_{31} = r_{13} = -\frac{1}{\int_0^\ell \frac{dx}{E(x)A}}; \quad (2)$$

$$\dot{\delta}_{52} = \dot{\delta}_{64} = \frac{1}{\ell}; \quad \dot{\delta}_{54} = \dot{\delta}_{62} = -\frac{1}{\ell}; \quad \dot{r}_{25} = \dot{r}_{46} = -\frac{1}{\ell}; \quad \dot{r}_{26} = \dot{r}_{45} = \frac{1}{\ell}; \quad (3)$$

$$\delta_{55} = \int_0^\ell \frac{M_5^*(x)M_5^*(x)}{E(x)J} dx; \quad \delta_{66} = \int_0^\ell \frac{M_6^*(x)M_6^*(x)}{E(x)J} dx; \quad (4)$$

$$\delta_{56} = \delta_{65} = \int_0^\ell \frac{M_5^*(x)M_6^*(x)}{E(x)J} dx; \quad M_5^*(x) = 1 - \frac{x}{\ell}; \quad M_6^*(x) = \frac{x}{\ell}; \quad (5)$$

$$R_{x,H} = -F_{x,H} - \frac{q_x \ell}{2}; \quad R_{y,H} = -F_{y,H} - \frac{q_y \ell}{2}; \quad R_{x,K} = -F_{x,K} - \frac{q_x \ell}{2}; \quad R_{y,K} = -F_{y,K} - \frac{q_y \ell}{2}; \quad (6)$$

$$\Delta_H = \int_0^\ell \frac{M_5^*(x)M_F(x)}{E(x)J} dx; \quad \Delta_K = \int_0^\ell \frac{M_6^*(x)M_F(x)}{E(x)J} dx; \quad M_F(x) = \frac{qx}{2}(\ell - x); \quad (7)$$

$$q = q_x \sin \alpha - q_y \cos \alpha. \quad (8)$$

В формулах (2) – (8) обозначено: q_x, q_y – равномерно распределённые нагрузки, приложенные к конечному элементу; A, J – площадь и осевой момент инерции соответственно. В указанных формулах все интегралы вычисляются численно по способу прямоугольников.

Для составления разрешающей системы уравнений смешанного метода используются условия равновесия в виде равенства нулю реакций в наложенных на систему связях и условия совместности деформаций в виде равенства нулю перемещений по направлению отброшенных связей [1]. Перед формированием системы уравнений смешанного метода матрица

откликов КЭ переводится из местной системы координат в общую с помощью матрицы направляющих косинусов $[C]$ и рассылается в общую матрицу откликов $[B]$ в соответствие с принятой нумерацией:

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [B] = [C] \times [B^*] \times [C]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} \cos^2 \alpha & r_{11} \cos \alpha \sin \alpha & r_{13} \cos^2 \alpha & r_{13} \cos \alpha \sin \alpha & -\dot{r}_{25} \sin \alpha & -\dot{r}_{26} \sin \alpha \\ r_{11} \cos \alpha \sin \alpha & r_{11} \sin^2 \alpha & r_{13} \sin \alpha \cos \alpha & r_{13} \sin^2 \alpha & \dot{r}_{25} \cos \alpha & \dot{r}_{26} \cos \alpha \\ r_{31} \cos^2 \alpha & r_{31} \cos \alpha \sin \alpha & r_{33} \cos^2 \alpha & r_{33} \sin \alpha \cos \alpha & -\dot{r}_{45} \sin \alpha & -\dot{r}_{46} \sin \alpha \\ r_{31} \cos \alpha \sin \alpha & r_{31} \sin^2 \alpha & r_{33} \sin \alpha \cos \alpha & r_{33} \sin^2 \alpha & \dot{r}_{45} \cos \alpha & \dot{r}_{46} \cos \alpha \\ -\dot{\delta}_{52} \sin \alpha & \dot{\delta}_{52} \cos \alpha & -\dot{\delta}_{54} \sin \alpha & \dot{\delta}_{54} \cos \alpha & \delta_{55} & \delta_{56} \\ -\dot{\delta}_{62} \sin \alpha & \dot{\delta}_{62} \cos \alpha & -\dot{\delta}_{64} \sin \alpha & \dot{\delta}_{64} \cos \alpha & \delta_{65} & \delta_{66} \end{bmatrix}$$

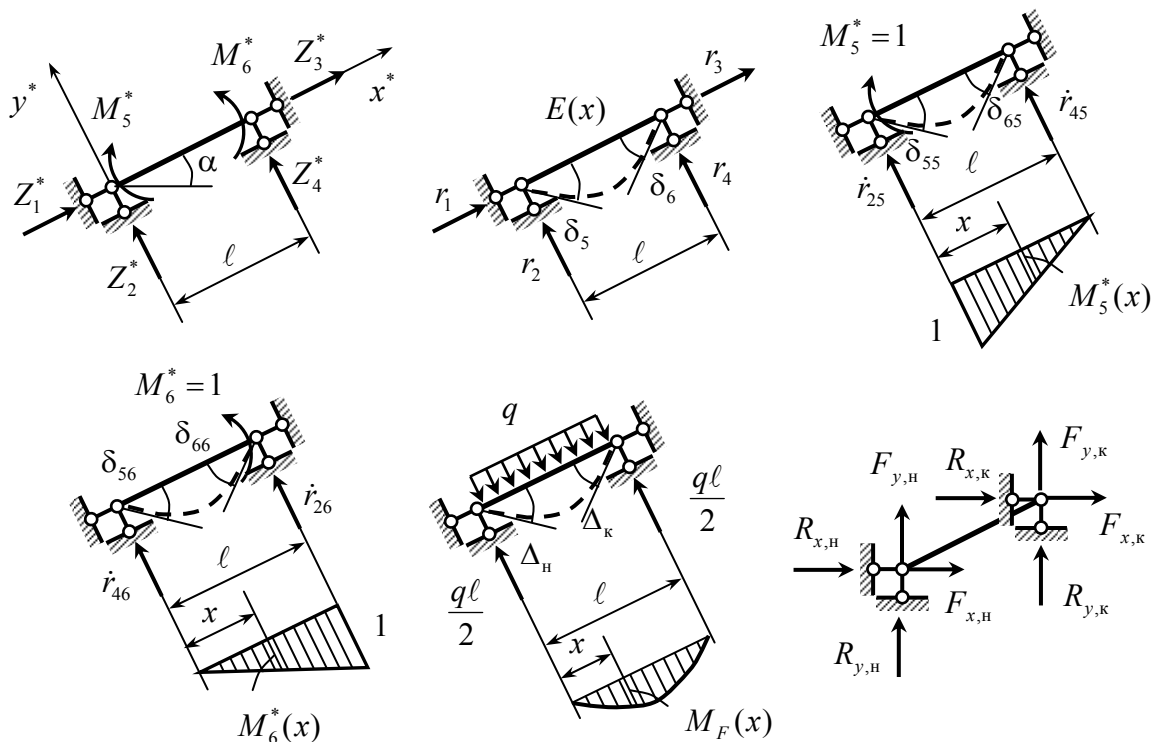


Рис. 1. – Схемы для определения элементов матрицы откликов и вектора грузовых коэффициентов

Затем учитываются условия закрепления и условия стыковки КЭ между собой [12]. По разработанному алгоритму рассчитано два примера из уже имеющихся в литературе [15, 16] и один новый пример.

Результаты и обсуждение

Пример № 1. Рассматривается консольная стойка [15], нагруженная сосредоточенной силой F с постоянным по длине ℓ прямоугольным поперечным сечением $b \times h$ и переменным модулем упругости $E(x)$. Данная задача связана с бионическим изучением стеблей растений, жёсткость которых меняется от вершины к основанию по закону

$$E(x) = E_0 \left(0,92 \frac{x}{\ell} + 0,0754 + 0,0046 \frac{\ell}{x} \right). \quad (9)$$

Автором [15] предложена формула для вычисления прогиба на краю стержня, модуль упругости которого задан по закону (9), в виде

$$v(\ell) = \frac{1,0579 F \ell^3}{E_0 J}. \quad (10)$$

Для решения данного примера с использованием разработанного алгоритма смешанного метода были приняты следующие исходные данные: $\ell = 0,3$ м, $b = h = 3$ см, $F = 0,1$ кН, $E_0 = 10^7$ кПа. Прогиб на краю консоли при величине момента инерции поперечного сечения $J = 6,75$ см⁴, вычисленный по формуле (10), составил величину $v(\ell) = 4,23$ мм. При использовании разработанного КЭ смешанного метода был вычислен прогиб $v(\ell) = 4,195$ мм.

Пример № 2. Для консольной балки минимального веса [16] с постоянными по длине ℓ размерами прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ требуется определить последовательность набора материалов, при которой прогиб на краю консоли от действия сосредоточенной силы F не превышает заданной величины. Характеристики модулей упругости материалов, из которых может состоять балка, следующие: сферопластик

$E_1 = 0,027 \cdot 10^8$ кПа; дюралюминий $E_2 = 0,71 \cdot 10^8$ кПа; титановый сплав $E_3 = 1,2 \cdot 10^8$ кПа; сталь $E_4 = 2,1 \cdot 10^8$ кПа; медь $E_5 = 1,12 \cdot 10^8$ кПа. Результаты вычисления прогиба $v(\ell)$ при заданных числовых данных $\ell = 1,0$ м, $b = 10$ см, $h = 2,289$ см, $F = 0,5$ кН приведены в табл. 1.

Таблица № 1

Величины прогибов, вычисленные для консольной балки с различными наборами материалов

Число слоёв материалов	Наименование материала	Координата, м		Прогиб $v(\ell)$, м	
		начала	конца	Согласно [16]	По предложенному алгоритму
Три	Титановый сплав	0	0,24	0,0197	0,01973
	Дюралюминий	0,24	0,86		
	Сферопластик	0,86	1,0		
Пять	Титановый сплав	0	0,14	0,0198	0,01983
	Дюралюминий	0,14	0,16		
	Титановый сплав	0,16	0,26		
	Дюралюминий	0,26	0,86		
	Сферопластик	0,86	1,0		
Семь	Титановый сплав	0	0,16	0,0199	0,01991
	Дюралюминий	0,16	0,2		
	Титановый сплав	0,2	0,24		
	Дюралюминий	0,24	0,26		
	Титановый сплав	0,26	0,3		
	Дюралюминий	0,3	0,86		
	Сферопластик	0,86	1,0		

Пример № 3. Рассматривается плоская рама (рис. 2, а) с элементами прямоугольного поперечного сечения шириной $b = 30$ см, высотой $h = 60$ см; пролётом $L = 6$ м, высотой стоек $H = 3$ м, загруженная равномерно распределённой нагрузкой $q = 10$ кН/м. Закон изменения модуля упругости задан в виде $E(x) = E_0(1 + x^2)$, где $E_0 = 2,5 \cdot 10^7$ кПа. Требуется определить

изгибающие моменты в сечениях рамы и вертикальное перемещение в середине пролёта. Схема нумерации узлов и КЭ показана на рис. 2, б. Результаты расчёта изгибающих моментов и прогибов представлены в табл. 2. Также в табл. 2 приведены рассчитанные величины при постоянной по длине элемента величине модуля упругости $E(x) = E_0$. Данная задача рассчитывалась в программном комплексе ЛИРА САПР. Для случая переменного по длине КЭ модуля упругости каждый стержень делился на 10 равных частей, в пределах которых модуль упругости задавался средним по величине в пределах участка.

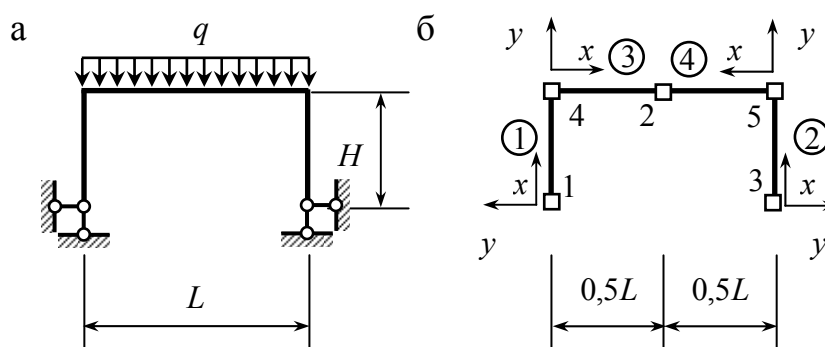


Рис. 2. – Схемы для примера № 3: а) расчётная схема рамы;
б) схема нумерации узлов и КЭ

Таблица № 2

Величины внутренних усилий и прогибов для рамы из примера №3

Номер узла	Изгибающие моменты в кНм при законе изменения $E(x)$		Прогиб в середине пролёта рамы в мм при законе изменения $E(x)$	
	$E(x) = E_0(1+x^2)$	$E(x) = E_0$	$E(x) = E_0(1+x^2)$	$E(x) = E_0$
4; 5	32,91 (32,64*)	22,78 (22,44*)	0,170 (0,172*)	0,511 (0,521*)
2	12,09 (12,36*)	22,22 (22,56*)		

* – результаты, полученные в программном комплексе ЛИРА САПР

Результаты расчёта, приведённые в табл. 2 свидетельствуют о том, что внутренние усилия и перемещения в конструкции с переменным и постоянным по длине элемента модулем упругости существенно отличаются

друг от друга, что позволяет, варьируя законом $E(x)$, ставить и решать задачу оптимального регулирования параметров напряжённо-деформированного состояния.

Заключение

В статье предложен алгоритм расчёта плоских стержневых систем с переменным по длине модулем упругости, основанный на МКЭ в форме смешанного метода. Алгоритм расчёта программно реализован на языке Object Pascal в среде визуального программирования Delphi 7. Результаты решения примеров свидетельствуют о корректной работе предложенного алгоритма. Показано, что направленно изменяя свойства материала, можно регулировать параметры напряжённо-деформированного состояния конструкции.

Работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ (номер проекта 7.8899.2017/8.9).

Литература

1. Дарков А.В., Шапошников В.А. Строительная механика. СПб. Лань, 2010. 656 с.
 2. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Маляренко А.А., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А., Фиалко С.Ю. SCAD Office. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD++. М.: «СКАД СОФТ», 2015. 848 с.
 3. Городецкий Д.А., Барабаш М.С., Титок В.П., Артамонова А.Е.; под ред. Городецкого А.С. Программный комплекс ЛИРА-САПР 2013: учебное пособие. К.-М.: Электронное издание, 2013. 376 с.
 4. Наседкин А.В., Шевцова М.С. Сравнительный анализ результатов моделирования пористой пьезокерамики методами эффективных модулей и конечных элементов с экспериментальными данными // Инженерный вестник Дона, 2013. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1615.
-

5. Тарануха Н.А., Васильев А.С. Численное исследование конструкций из гетерогенных сред на основе метода конечных элементов // Вестник Приамурского государственного университет им. Шолом-Алейхема, 2017. № 1 (26). С. 90–102.
 6. Christoforo A.L. Numerical evaluation of the modulus of longitudinal elasticity in structural round timber elements of the Eucalyptus genus / A.L. Christoforo [and others]. // Eng. Agric. Vol. 31. № 5. Jaboticabal Sept./Oct., 2011. pp. 110.
 7. Farsi A. Full deflection profile calculation and Young's modulus optimization for engineered high performance materials / A. Farsi [and others]. Nature. Scientific reports, 2017. pp 1–13.
 8. Трушин С.И. Строительная механика. Метод конечных элементов: учебное пособие. М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. 305 с. URL: znanium.com/go.php?id=524311.
 9. Юдин Ю.Я. Энергетический метод в автоматизации инженерных расчётов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. 256 с.
 10. Игнатъев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода (особенности и возможности применения) // Строительная механика и расчёт сооружений, 2015. № 3(260). С. 55-60.
 11. Лавыгин Д.С. Алгоритм смешанного метода конечных элементов решения задач теории стержней // Инженерный вестник Дона, 2013. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/1910.
 12. Клёнов Д.А., Путеева Л.Е., Тухфатуллин Б.А. Программная реализация МКЭ для расчёта плоских стержневых систем в форме смешанного метода. Сообщение 1 // Перспективы развития фундаментальных наук: сборник трудов XII Междун. Конференция студентов и молодых ученых (21–24 апреля 2015 г.) / Томский политехнический университет, Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2015. С. 1329–1331.
-

13. Марина Н.И., Тухфатуллин Б.А., Путеева Л.Е. Конечный элемент сжато-изгибаемого стержня переменного сечения при расчёте смешанным методом // Избранные доклады 63-й университетской научно-технической конференции студентов и молодых ученых. Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2017. С. 57–65.
14. Тухфатуллин Б.А., Путеева Л.Е., Раков В.Д. Разработка и апробация конечного элемента смешанного метода для расчёта стержневых систем с элементами переменной жёсткости // Инвестиции, строительство, недвижимость как материальный базис модернизации и инновационного развития экономики: материалы VIII Международной научно-практической конференции, 13–15 марта 2018 г. : в 2 ч. Ч. 1. Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2018. С. 456–466.
15. Саркисян Г.М. Совершенствование несущих конструкций сельскохозяйственных машин на основе использования бионических принципов: автореферат дис. ...докт. техн. наук. Ереван, 1992. 42 с.
16. Алёхин В.В. Проектирование поперечно-слоистой консоли минимальной массы при ограничении на максимальный прогиб // Прикладная механика и техническая физика, 2007. Т. 48. № 4. С. 104-110.

References

1. Darkov A.V., Shaposhnikov V.A. Stroitel'naya mekhanika [Structural mechanics]. SPb.: Lan', 2010. 656 p.
2. Karpilovskiy V.S., Kriksunov E.Z., Malyarenko A.A., Perel'muter A.V., Perel'muter M.A., Fialko S.Yu. SCAD Office. Versiya 21. Vychislitel'nyy kompleks SCAD++ [SCAD Office. Version 21. Computing complex SCAD ++]. M.: «SKAD SOFT», 2015. 848 p.
3. Gorodetskiy D.A., Barabash M.S., Titok V.P., Artamonova A.E.; pod red. Gorodetskogo A.S. Programmnyy kompleks LIRA-SAPR 2013 [The program

- complex LIRA-SAPR 2013: a study guide]: uchebnoe posobie. K.-M.: Elektronnoe izdanie, 2013. 376 p.
4. Nasedkin A.V., Shevtsova M.S. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1615.
 5. Taranukha N.A., Vasil'ev A.S. Vestnik Priamurskogo gosudarstvennogo universitet im. Sholom-Aleykhema, 2017. № 1 (26). pp. 90–102.
 6. Christoforo A.L. Eng. Agric. Vol. 31. № 5. Jaboticabal Sept. /Oct. 2011. pp. 110.
 7. Farsi A. Nature. Scientific reports, 2017. pp 1–13.
 8. Trushin S.I. Stroitel'naya mekhanika. Metod konechnykh elementov [Structural mechanics. Finite element method]: uchebnoe posobie. M.: NITs INFRA-M, 2016. 305 p. URL: znanium.com/go.php?id=524311.
 9. Yudin Yu.Ya. Energeticheskiy metod v avtomatizatsii inzhenernykh raschetov [Energy method in automation of engineering calculations]. Tomsk: Izd-vo Tom. un-ta, 1986. 256 p.
 10. Ignat'ev A.V. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy, 2015. № 3(260). pp. 55-60.
 11. Lavygin D.S. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/1910.
 12. Klenov D.A., Puteeva L.E., Tukhfatullin B.A. Perspektivy razvitiya fundamental'nykh nauk sbornik trudov XII Mezhdun. Konferentsiya studentov i molodykh uchennykh (21–24 aprelya 2015 g.). Tomskiy politekhnicheskij universitet, Tomsk: Izd-vo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta, 2015. pp. 1329–1331.
 13. Marina N.I., Tukhfatullin B.A., Puteeva L.E. Izbrannye doklady 63-y universitetskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii studentov i molodykh uchennykh. Tomsk: Izd-vo Tom. gos. arkhит.-stroit. un-ta, 2017. pp. 57–65.
-



14. Tukhfatullin B.A., Puteeva L.E., Rakov V.D. Investitsii, stroitel'stvo, nedvizhimost' kak material'nyy bazis modernizatsii i innovatsionnogo razvitiya ekonomiki: materialy VIII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii, 13–15 marta 2018 g.: v 2 ch. Ch. 1. Tomsk: Izd-vo Tom. gos. arkhит.-stroit. un-ta, 2018. pp. 456–466.
15. Sarkisyan G.M. Sovershenstvovanie nesushchikh konstruktsiy sel'sko-khozyaystvennykh mashin na osnove ispol'zovaniya bionicheskikh printsipov [Improvement of bearing structures of agricultural machines based on the use of bionic principles]: avtoreferat dis. ...dokt. tekhn. nauk. Erevan, 1992. 42 p.
16. Alekhin V.V. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 2007. T. 48. № 4. pp. 104–110.