

## Исследование процесса теплопереноса в тепловыделяющем элементе цилиндрической формы

*С.А. Зинина, А.И. Попов, Д.М. Брагин, А.В. Еремин*

*ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет», Самара*

**Аннотация:** Представленная работа посвящена исследованию температурного состояния тепловыделяющего элемента (ТВЭЛ) – твёрдого тела цилиндрической формы с внутренним источником тепла постоянной мощности. Используя интегральный метод теплового баланса с введением дополнительной искомой функции, получили приближенное аналитическое решение соответствующей краевой задачи теплопроводности. Условия внешнего теплообмена на границе исследуемой области задавались согласно закону Ньютона – Рихмана (граничное условие третьего рода). При получении решения применялись тригонометрические координатные функции. Их использование позволило сократить число слагаемых в искомом решении за счет априорного выполнения граничного условия в центре ТВЭЛ. Показано, что при использовании всего трех слагаемых в аналитическом решении (первое приближение) достигается точность, достаточная для инженерных приложений. Оценка погрешности разработанного метода производилась путем сравнения полученных результатов с численным решением на основе метода конечных разностей. В статье приводятся графики распределения температуры при различных значениях мощности объемных источников тепла ТВЭЛ. Разработанный метод может быть использован для определения времени выхода системы на стационарный режим, оценки максимальной температуры ТВЭЛ при различных значениях безразмерных чисел Био и Померанцева, определения температурных напряжений.

**Ключевые слова:** внутренние источники теплоты, граничные условия третьего рода, дополнительная искомая функция, интеграл теплового баланса, тепловыделяющий элемент, приближенное аналитическое решение, численное решение, задача теплопроводности, число Био, число Померанцева.

Изучение процесса теплопереноса в тепловыделяющих элементах (ТВЭЛ) представляет большой интерес [1]. ТВЭЛ – это тело цилиндрической формы с внутренним источником тепла постоянной мощности. Моделирование процесса теплопереноса в ТВЭЛ позволяет решить ряд практических задач: оптимизацию конструкции тепловыделяющих элементов; определение критических режимных параметров нагрева (максимальных температур, термических напряжений и др.), обуславливающих безопасную эксплуатацию ТВЭЛ.

При моделировании процессов теплопереноса используют точные аналитические, численные, приближенные аналитические методы [2,3]. Так, например, в работе В.А. Горбунова и др. [4] было получено численное решение задачи по определению температурного поля в тепловыделяющем элементе в двумерной постановке. Задача решалась методом конечных элементов в программном комплексе Comsol Multiphysics. На основе полученного решения авторы разработали оригинальный вычислительный алгоритм в программном комплексе MathCAD. В статье [5] было рассмотрено моделирование процесса теплообмена в многослойном полом цилиндре с учетом внутренних источников тепла. Моделирование осуществлялось на основе метода редукции, концепции квазипроизводных, метода разделения переменных и модифицированного метода собственных функций Фурье. Полученное решение возможно применить для изучения процесса охлаждения тепловыделяющего элемента. Также в работе В.А. Левченко и др. [6] для определения нестационарного температурного поля в цилиндре использовался комбинированный метод, основанный на применении метода конечных интегральных преобразований и метода разделения переменных (метод Фурье).

В данной статье приведены результаты решения задачи теплообмена в цилиндрическом ТВЭЛ с внутренними источниками теплоты при граничных условиях третьего рода. Получено приближенное аналитическое решение на основе интегрального метода теплового баланса с использованием дополнительной искомой функции и дополнительных граничных характеристик [7 - 9].

### **Постановка задачи**

Уравнение теплового баланса в одномерном виде с внутренними источниками имеет вид [10]:

$$c\rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{q} + q_v, \quad (1)$$

где  $c$  – теплоемкость;  $\rho$  – плотность;  $T$  – температура;  $t$  – время;  $x$  – пространственная координата;  $q_v = q_0 = \text{const}$  – мощность внутренних источников тепла.

Закон Фурье

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} T. \quad (2)$$

При постоянных теплофизических свойствах ( $\lambda = \text{const}$ ) справедлива запись:

$$c\rho \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) + q_v. \quad (3)$$

Учитывая, что  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} T) = \Delta T = \nabla^2 T$ , уравнение (3) примет вид:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \Delta T + \frac{q_v}{c\rho}. \quad (4)$$

Записывая уравнение (4) в цилиндрических координатах, получим:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \left[ \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(x,t)}{\partial r} \right] + \frac{q_0}{c\rho} \quad T = f(r,t) = T(r,t). \quad (5)$$

Краевые условия к задаче имеют вид:

$$T(r,0) = T_0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial r} = 0; \quad (7)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(R,t)}{\partial r} = \alpha(T - T_{\text{cp}}). \quad (8)$$

С целью параметризации задачи введем безразмерные параметры:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_0 - T_{\text{cp}}}; \quad \text{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda}; \quad \xi = \frac{r}{R}; \quad \text{Fo} = \frac{at}{R^2}; \quad \text{Po} = \frac{q_0 R^2}{\lambda(T_0 - T_{\text{cp}})}. \quad (9)$$

Уравнение (5) с учетом (9) примет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} + Po \quad (Fo > 0; \quad 0 < \xi < 1); \quad (10)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} = -Bi\Theta(1, Fo). \quad (13)$$

### Описание метода решения задачи

Решение задачи (10) – (13) отыскивается в виде следующего тригонометрического ряда:

$$\Theta(\xi, Fo) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2} \xi\right). \quad (14)$$

Введем дополнительную функцию – закон изменения температуры в центре цилиндрического ТВЭЛ:

$$q(Fo) = \Theta(0, Fo). \quad (15)$$

Используем дополнительное условие на границе исследуемой области [11,12]:

$$\frac{\partial q(Fo)}{\partial Fo} - 2 \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} - Po = 0. \quad (16)$$

Точность получаемого решения будет зависеть от количества  $n$  членов ряда (14). Ограничиваясь тремя членами ряда выражение (14) примет вид:

$$\Theta(\xi, Fo) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} \xi\right) + a_2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} \xi\right). \quad (17)$$

Для нахождения коэффициентов  $a_i$ , подставим (17) в основные и дополнительные условия на границе (13), (15) и (16). Граничное условие (12) выполняется при любых значениях неизвестных коэффициентов в (14). В результате получаем систему трех уравнений вида:

$$\begin{cases} \frac{3\pi a_2}{2} - \frac{\pi a_1}{2} + \text{Bi} a_0 = 0; \\ a_0 + a_1 + a_2 = q(\text{Fo}); \\ \frac{\partial q(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - \text{Po} + \frac{\pi^2 a_1}{2} + \frac{9\pi^2 a_2}{2} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Из решения системы уравнений (18) определим следующие значения коэффициентов  $a_i$ :

$$a_0 = \frac{2 \frac{\partial q(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - 2\text{Po} + 3\pi^2 q(\text{Fo})}{4\pi \text{Bi} + 3\pi^2};$$
$$a_1 = \frac{3\pi \text{Po} - 2\text{Bi} \text{Po} - 3\pi \frac{\partial q(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} + 2\text{Bi} \frac{\partial q(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} + 9\pi^2 \text{Bi} q(\text{Fo})}{8\pi^2 \text{Bi} + 6\pi^3};$$
$$a_2 = -\frac{\pi \frac{\partial q(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} - 2\text{Bi} \text{Po} - \pi \text{Po} + 2\text{Bi} \frac{\partial q(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} + \pi^2 \text{Bi} q(\text{Fo})}{8\pi^2 \text{Bi} + 6\pi^3}.$$

В соответствии с методом запишем интеграл исходного дифференциального уравнения (10) (интеграл теплового баланса):

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} + \text{Po} d\xi. \quad (19)$$

Вычислив интеграл теплового баланса (19), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, представленное в общем виде:

$$\frac{\partial^2 q(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}^2} + a \frac{\partial q(\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} + bq(\text{Fo}) + c = 0. \quad (20)$$

Решение (20) имеет вид:

$$q(\text{Fo}) = C_1 e^{\frac{\text{Fo}(-a-\sqrt{-4b+a^2})}{2}} + C_2 e^{\frac{\text{Fo}(-a+\sqrt{-4b+a^2})}{2}} - \frac{c}{b}, \quad (21)$$

где  $a, b, c$  - коэффициенты, зависящие от условий теплообмена (зависят только от коэффициента Био и числа Померанцева).

В (20), (21) неизвестные коэффициенты определяются соотношениями:

$$a = \frac{0.1157}{Bi + 2.3504} - \frac{67.815}{Bi + 4.2605} - \frac{0.12652}{Bi + 2.3602} + 35.535,$$
$$b = \frac{0.065092}{Bi + 2.3504} - \frac{758.49}{Bi + 4.2605} - \frac{0.20596}{Bi + 2.3602} + 178.08,$$
$$c = -\frac{Po(73.634 + 104.38Bi + 48.816Bi^2 + 7.5449Bi^3)}{4.0691Bi + 1.425Bi^2 + 0.158839Bi^3 + 3.7543}.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $C_i$  используются следующие условия, полученные с использованием начального условия (11):

$$\begin{cases} q(0) = 1; \\ \frac{\partial q(0)}{\partial Fo} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Исходя из решения системы, определяются значения коэффициентов  $C_i$  (для  $i = 1, 2$ )

$$C_i = (-1)^i \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 - 4b}} + (-1)^i \right) \frac{b+c}{2b}.$$

При конкретных значениях безразмерных чисел Био и Померанцева коэффициенты  $a, b, c$  принимают числовые значения:  $a_0 = 35.527$ ,  $a_1 = 178.008$ ,  $a_2 = -474.885$ ,  $a = 35.528$ ,  $b = 178.01$ ,  $c = -474.89$ ,  $C_1 = 0.429$ ,  $C_2 = -2.097$ .

## Результаты

На рис. 1 представлено распределение температуры по радиусу цилиндра. При значениях Фурье меньше 0.2 наблюдается расхождение численного и аналитического решения, что говорит о необходимости увеличения числа членов ряда (14) с целью повышения точности решения. На рисунке пунктирная линия – численное решение, сплошная линия – решение, полученное по формуле (17). Также в работе была получена зависимость температуры по времени при различных значениях параметров Померанцева. Из анализа рис. 2 видно, что, вне зависимости от значения числа

Померанцева, наблюдается стационарный режим нагрева. Продолжительность выхода системы на стационарный режим определяется безразмерными коэффициентами  $Bi$  и  $Ro$ . На рис. 2 приведен график зависимости температуры от времени в точке  $\xi = 0.5$  при  $Bi = 10000$ .

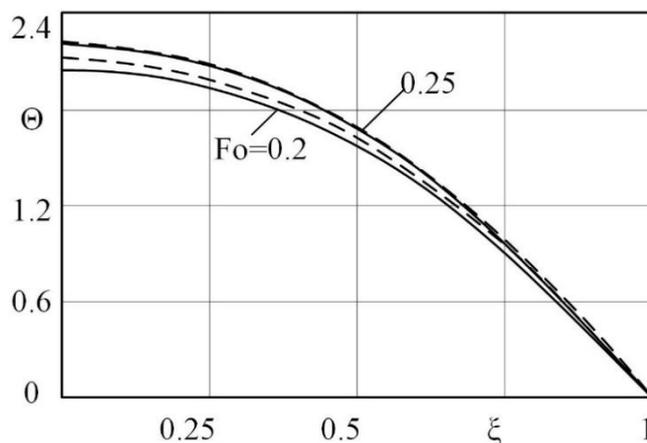


Рис 1. – Распределение температуры по толщине цилиндра при  $Bi = 10000$  и  $Ro = 10$ .

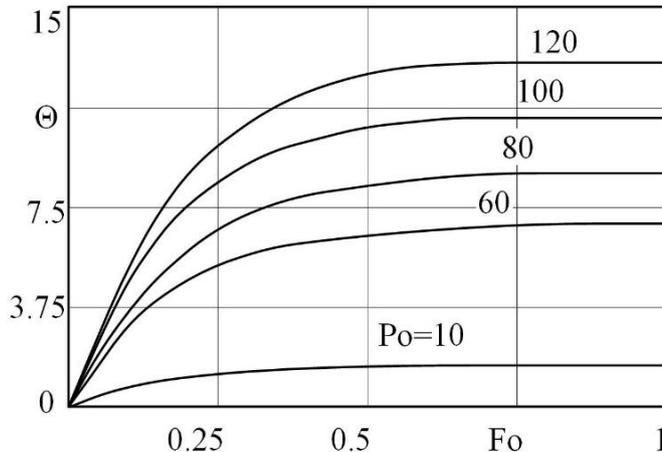


Рис 2. – Зависимость температуры по времени в точке  $\xi = 0.5$

На рис. 3 приведены графики функции  $q(Fo) = \Theta(0, Fo)$  при конкретных значениях числа Померанцева. Расхождение между численным и аналитическим решением в данном случае не превышает 3 %. На рисунке пунктирная линия – численное решение, сплошная линия – решение, полученное по формуле (17).

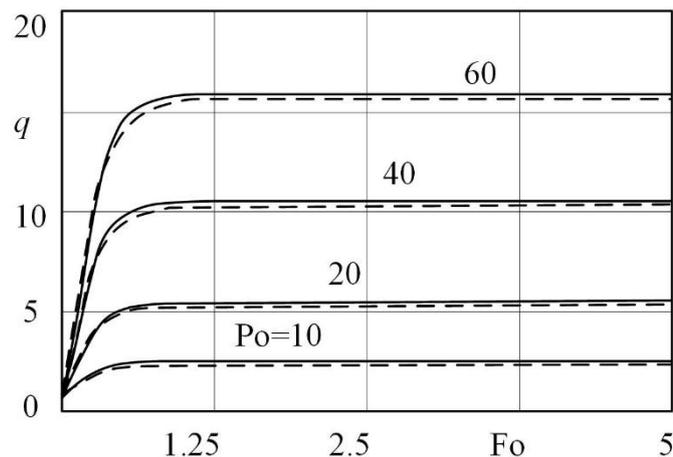


Рис 3. – Распределение температуры во времени при  $\xi = 0$

### Благодарности

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-00047, [rscf.ru/project/21-79-00047/](https://rscf.ru/project/21-79-00047/)*

### Литература

1. Eremin A.V., Gubareva K.V., Ilyasov A.A., Trubitsyn K.V., Iglin P.V. The study of the heat transfer process in bodies with internal heat sources of variable power. 4th International Scientific and Technical Conference on Energy Systems. 2019. Pp. 1-10.
2. Канторович Л.В. О новом методе приближенного решения уравнений с частными производными. ДАН СССР. 1934. 2(9). С. 532-534.
3. Цой П.В. Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. Москва. Московский энергетический институт. 2005. 568 с.
4. Горбунов В.А., Иванова Н.Б., Лоншаков Н.А., Белов Я.В. Разработка модели по определению температурного поля твэла в двумерной постановке задачи. Известия вузов. Ядерная энергетика. 2019. №2. С. 174-184.
5. Tatsiy R.M., Pazen O.Y., Vovk S.Y., Kharyshyn D.V. Simulation of heat transfer process in a multilateral cylindrical shell taking into account the internal

heat sources. Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. 2020. №3. Pp. 27-32.

6. Зайцев А.А., Кащеев М.В., Дорохович С.Л., Левченко В.А. Решение двумерной задачи нестационарной теплопроводности в k-слойных пластине и цилиндре. Известия вузов. Ядерная энергетика. 2020. №1. С. 58-66.

7. Eremin A.V. Approximate analytical solution of the Graetz problem. Journal of Physics: Conference Series. 2021. 1745 (1).

8. Eremin A.V., Kudinov V.A., Stefanyuk E.V. Heat Exchange in a Cylindrical Channel with Stabilized Laminar Fluid Flow. Fluid Dynamics. 2018. Vol. 53. pp. 29-39.

9. Kudinov I.V., Kotova E.V., Kudinov V.A. A Method for Obtaining Analytical Solutions to Boundary Value Problems by Defining Additional Boundary Conditions and Additional Sought-For Functions. Numerical Analysis and Applications. 2019. 12 (2). Pp. 126-136.

10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. Москва. Высшая школа. 1967. 600 с.

11. Eremin A.V. Study of thermal exchange with liquid flowing in a cylindrical channel. International Science and Technology Conference "EastConf". 2019. Pp. 1-5.

12. Stefanyuk E.V., Kudinov V.A. Additional boundary conditions in nonstationary problems of heat conduction. High Temperature. 2009. 47 (2). Pp. 250-262.

### References

1. Eremin A.V., Gubareva K.V., Ilyasov A.A., Trubitsyn K.V., Iglin P.V. 4th International Scientific and Technical Conference on Energy Systems. 2019. Pp. 1-10.

2. Kantorovich L.V. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1934. 2 (9). Pp. 532-534.



3. Tsoi P.V. Sistemnye metody rascheta kraevykh zadach teplomassoperenosa [System Methods for Calculating Boundary Problems on Heat and Mass Transfer]. Moskva. Moskovskij energeticheskij institut. 2005. 568 pp.
4. Gorbunov V.A., Ivanova N.B., Lonshakov N.A., Belov Ya. V. Izvestiya vuzov. YAdernaya energetika. 2019. No. 2. Pp. 174-1849.
5. Tatsiy R.M., Pazen O.Y., Vovk S.Y., Kharyshyn D.V. Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. 2020. №3. Pp. 27-32.
6. Zaitsev A.A., Kascheev M.V., Dorokhovich S.L., Levchenko V.A. Izvestiya vuzov. YAdernaya energetika. 2020. Pp. 58-66.
7. Eremin A.V. Journal of Physics: Conference Series. 2021. 1745 (1).
8. Eremin A.V., Kudinov V.A., Stefanyuk E.V. Fluid Dynamics. 2018. Vol. 53. Pp. 29-39.
9. Kudinov I.V., Kotova E.V., Kudinov V.A. Numerical Analysis and Applications. 2019. 12 (2). Pp. 126-136.
10. Lykov A.V. Teoriya teploprovodnosti [Theory of heat conduction]. Moskva. Vysshaya shkola. 1967. Pp. 600.
11. Eremin A.V. International Science and Technology Conference "EastConf". 2019. Pp. 1-5.
12. Stefanyuk E.V., Kudinov V.A. High Temperature. 47 (2). Pp. 250-262.