

Моделирование динамики перемешивания двухкомпонентной смеси Марковским процессом

П.А. Севостьянов, Т.А. Самойлова, А.А. Белевитин, И.М. Бурдин

Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина, Москва

Аннотация: В статье рассматриваются вопросы имитационного моделирования процессов перемешивания волокнистых материалов с использованием Марковских процессов. Правильное сочетание и перераспределение компонентов в двухкомпонентной смеси существенно влияет на их физические свойства, а разработанная модель дает возможность оптимизировать этот процесс. Авторами предложен алгоритм моделирования переходов между состояниями смеси, основанный на Марковских процессах.

Ключевые слова: моделирование, имитация, смесь, перемешивание, волокнистые материалы

Практически все изделия из волокнистых материалов производятся из смесовой пряжи, т.е. пряжи, сформированной из смеси разнородных волокон, например, шерсти и ПАН-волокна (полиакрилонитрильного волокна) или хлопка и вискозных волокон [1,2]. Правильно подобранная смесь позволяет получить волокнистый материал, который приобретает лучшие свойства каждого компонента смеси и ослабляет их худшие свойства [3-5]. Правильно подобранная смесь – это смесь, в которой все компоненты присутствуют в заданных пропорциях, а сама смесь – гомогенная, т.е. эти пропорции максимально точно соблюдаются во всех частях и объемах смеси [6,7]. Для обеспечения качественного перемешивания используют специальные смесовые машины и другое технологическое оборудование, в котором наряду с основными процессами, для которых это оборудование предназначено, происходят и процессы перемешивания [8,9].

Далее рассматриваем только двухкомпонентные смеси, что практически не снижает глубины рассмотрения. В обобщенном виде процесс перемешивания можно представить следующим формализованным описанием [10,11]. Предположим, что компонент состоит из элементов, которые остаются неразделяемыми при перемешивании. Это могут быть отдельные волокна

в волокнистом компоненте, гранулы, куски породы, зерна при перемешивании сыпучих материалов и т.п. Обозначим V объем рабочей камеры смесовой машины, и v некоторый «физически» малый объем (ФМО), который, с одной стороны, мал относительно V , так что число таких объемов $N = V / v$ – большое число, но, с другой стороны, может вместить в себя достаточно много элементов каждого компонента. Поэтому для каждого такого объема можно определить долю компонента в смеси, находящейся в этом объеме. Будем считать смесь хорошо перемешанной, если в каждом ФМО доля компонента равна или незначимо отличается от заданной рецептурой смеси.

Пронумеруем все ФМО в рабочей камере машины $j = 1, \dots, N$. Перед смешиванием объем V заполняется компонентами согласно рецепту смеси. Однако, поскольку компоненты не перемешаны, а располагаются, например, слоями в соответствии со способом заполнения камеры, в каждом их ФМО находится или только первый, или только второй компонент. Это состояние смеси в момент $t = 0$ можно описать вектором $\mathbf{P}(0) = [p(j, 0) = 1 \text{ или } 0, j = 1, \dots, N]$. Для интенсификации перемешивания в смеситель помещают мешалку – вращающийся рабочий орган. Возникает «естественный» квант времени, соответствующий одному обороту мешалки. При смешивании волокнистых материалов мешалки не применяют, поскольку они способствуют загущиванию волокон. Однако квант времени можно ввести и в этом случае. За один шаг по времени происходит перемещение части компонента из ФМО в другие ФМО, т.е. происходит обмен некоторым количеством компонента между ФМО. Этот обмен детально невозможно отслеживать, он является вероятностным процессом, причем обладает Марковским свойством, поскольку каждое новое состояние смеси зависит непосредственно только от ее предыдущего состояния [12,13].

Переходы между состояниями смеси в последовательные моменты времени можно описать рекуррентным уравнением $\mathbf{P}(t+1) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{A}(t)$, в кото-

ром квадратная матрица $A(t)$ – одношаговая матрица вероятностей перехода для шага $t = 0, 1, 2, \dots$. Для более адекватного моделирования процесса перемешивания будет естественным предположить, что вероятности обмена компонентами между соседними ФМО выше, чем между объемами, более удаленными друг от друга. Пронумеруем ФМО так, чтобы большей удаленности ФМО отвечали большие разности их номеров $|i-j|$. В соответствии с этим сравним четыре модельных правила убывания вероятностей перехода в каждой из строк матрицы A :

$$a(i, j) = c \cdot \exp(-r \cdot |j - i|), \quad (1)$$

$$a(i, j) = c \cdot \exp(-r \cdot (j - i)^2), \quad (2)$$

$$a(i, j) = \begin{cases} c, & |j - i| \leq 1 \\ 0, & |j - i| > 1 \end{cases}, \quad (3)$$

$$a(i, j) = c, \quad (4)$$

В этих формулах параметр r задает скорость убывания вероятностей перехода, константа c – нормировочная для каждой строки A .

Правило (3) означает, что переходы возможны только между соседними ФМО. Правило (4) означает, что вероятности перехода в любой ФМО, в том числе и вероятность остаться в прежнем ФМО, одинаковы. В этом случае, как это следует из теории эргодических однородных Марковских процессов, предельное распределение долей по ФМО достигается за один шаг процесса [14].

В качестве меры близости долей компонента во всех ФМО к их доле p , заданной рецептом смеси, выберем средний квадрат отклонений:

$$Q = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (P(j, t) \cdot p \cdot N - p)^2 \quad (5)$$

Очевидно, что при равномерном распределении доли компонента по всем ФМО и «правильном» значении этой доли, равном p , величина Q будет равна нулю, а по мере перемешивания она будет стремиться к нулевому значению.

Альтернативной мерой неоднородности распределения компонента по ФМО независимо от заданной доли компонента в смеси p может служить энтропия распределения, с учетом известного факта, что при равномерном распределении энтропия максимальна:

$$h = - \sum_{j=1}^N P(j,t) \cdot \ln P(j,t) \quad (6)$$

При моделировании выбраны следующие значения параметров и начальных условий: количество ФМО $N = 100$, т.е. отлеживались элементы объема смесителя с точностью до 1% всего его объема. Число шагов перемешивания $Tm = 25$, что при кванте времени Δt соответствовало времени перемешивания $Ts = Tm \cdot \Delta t$; скорости переноса элементов компонентов $r_1 = 0.1$ и $r_2 = 0.01$, при которых завершается динамика перемешивания; двухкомпонентная смесь составлена в равных долях компонентов $p = 0,5$; перед началом перемешивания задавалось наиболее неблагоприятное распределение компонентов, когда половина расположенных рядом ФМО целиком заполнена первым компонентом, а вторая половина ФМО – вторым компонентом, что имитирует первоначальное полное разделение компонентов внутри камеры смесителя.

Начальное значение (5) равно:

$$Q(0) = \frac{1}{100} \sum_{j=1}^{50} (1 - 0.5)^2 + \frac{1}{100} \sum_{j=1}^{50} (0 - 0.5)^2 = 0.25$$

Начальное и предельное (при равномерном распределении смеси) значения энтропии смеси с пересчетом на один ФМО равны

$$H(0) = -\sum_{j=1}^{50} (p \cdot N)^{-1} \cdot \text{Ln}(p \cdot N)^{-1} / \text{Ln}(p \cdot N) = 1$$

$$H(\infty) = -\sum_{j=1}^{100} (N)^{-1} \cdot \text{Ln}(N)^{-1} / \text{Ln}(p \cdot N) = 1,772$$

На рис. 1 показано убывание $Q(t)$ от начального значения до конечного для смоделированного интервала времени при четырех правилах убывания вероятностей перехода (1) – (4). Подтверждено, что при правиле (4) предельное распределение достигается за один шаг. Для первых трех правил (1) – (3) наблюдается экспоненциальное уменьшение квадрата ошибки. Экспоненциальный закон убывания $Q(t)$ во всех случаях подтверждается преобразованием линий графиков прямые при перестройке их в логарифмическом масштабе по оси t , что соответствует общим закономерностям эргодических однородных Марковских процессов.

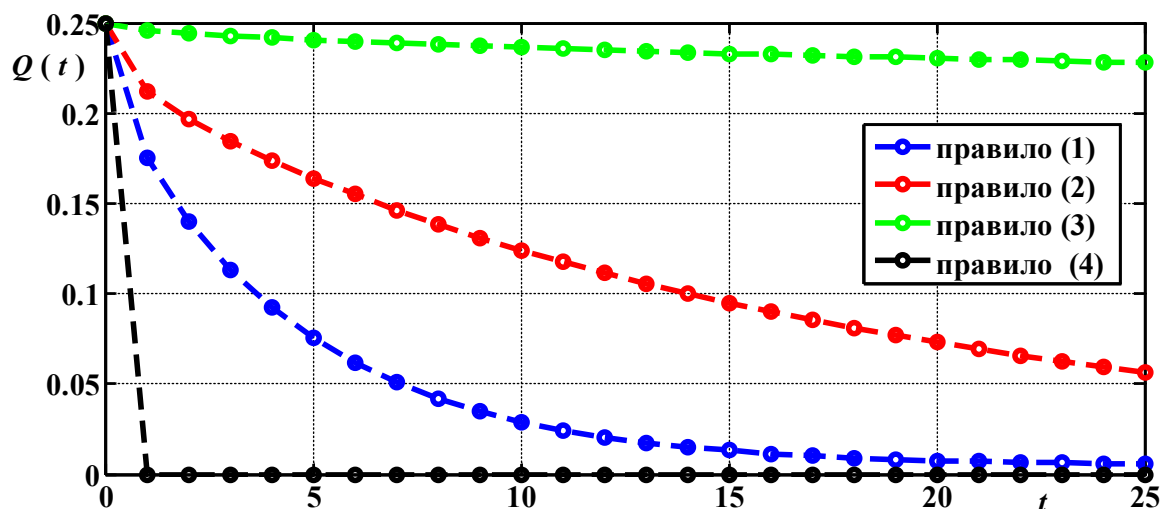


Рис. 1. - Динамика изменения квадратичного критерия при перемешивании двухкомпонентной смеси

Аналогичная динамика в направлении нарастания получена для энтропийной меры (6) равномерности распределения компонента (рис.2). Отметим, что, как и следовало ожидать, правила (1). (2) и (3) расположены по порядку увеличения длительности переходного режима. Заметно значительное разли-

чие в скоростях перемешивания для правил (1), (2) и (3). Из этого следует, что при исследовании процесса перемешивания необходима более детальная проработка особенностей механизма перемешивания и используемых при этом технических средств перемешивания.

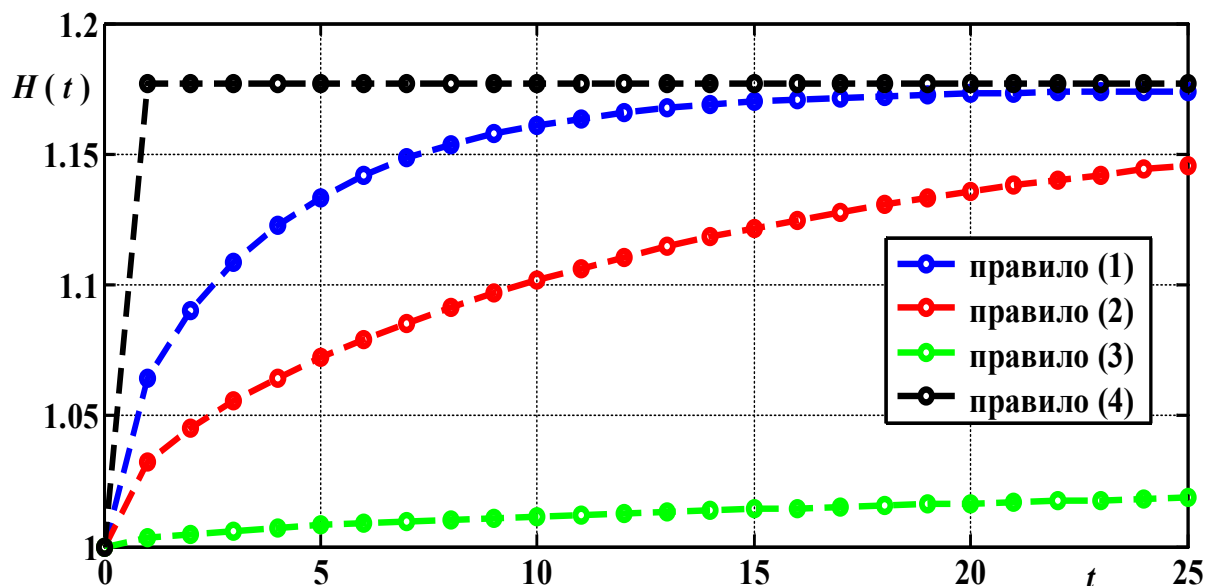


Рис. 2. - Динамика изменения энтропии смеси при перемешивании

Разработанная модель перемешивания для двухкомпонентных смесей сыпучих или близких к ним, например, волокнистых материалов, может быть детализирована для имитации процесса при различных законах перемещения элементов смеси и их заполнения ФМО с учетом эффектов слипания отдельных элементов, препятствующих перемешиванию. Таким образом, предлагаемая модель служит инструментом для более глубокого и детального исследования процесса и работы оборудования, на котором происходят процессы смешивания.

Литература

1. Севостьянов А.Г. Составление смесок и смешивание в хлопкопрядильном производстве: (Теория и практика). - Москва: Гизлегпром, 1954. - 192 с.



2. Севостьянов П.А. Динамика и модели основных процессов прядения : рыхление, очистка, смешивание, кардо- и гребнечесание, вытягивание, дискретизация, штапелирование, кручение, намотка, перемотка / Севостьянов П. А. - Москва: Клуб-Печати, 2021. - 591 с. ISBN 978-5-9904852-5-9

3. Zhong Z., Wang Y., Wu J., Chen R., Liangzhong L., Zhu R. Comprehensive quality evaluation of jutecell/cotton blended yarn based on principal component analysis. Indian Journal of Fibre & Textile Research Vol. 39, September 2014, pp. 326-328.

4. Atin C., Majumdar P.K. Effect of blend composition on tensile properties of blended Dref-III yarns. Indian Journal of Fibre & Textile Research Vol. 40, March 2015, pp. 36-42

5. Subramaniana S., Vaidheeswaran S., Pradeep S., Uthaman P. Comparison of polyester-cotton blended yarns produced by blending of polyester with semi-combed and super-carded cotton fibres. Indian Journal of Fibre & Textile Research Vol. 40, March 2015, pp. 31-35.

6. Севостьянов П.А., Виниченко С.Н. Корреляционные и спектральные свойства смешанного потока по составу компонентов // Инженерный вестник Дона, 2024, № 2ю URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2024/9041

7. Виниченко С.Н., Севостьянов П.А., Масанов Д.В. Компьютерный анализ регрессионных моделей качества смешивания разнородных волокон, полученных в результате полного факторного эксперимента // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. – 2024. – № 3(411). – С. 213-217.

8. Альзурфи М.К.А., Леонова А.Н., Хорошев А.А. Механические свойства фибробетона, пропитанного суспензией // Инженерный вестник Дона, 2025, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2025/9830

9. Сороканич С.В., Парамонова А.В. Оптимизация состава быстротвердеющих тяжелых бетонов с комплексной добавкой из отходов промышленности // Инженерный вестник Дона, 2025, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2025/9747

10. Бакин И.А. Математическое моделирование на основе стохастического подхода процесса смешивания дисперсных материалов; Федеральное агентство по образованию, Кемеровский технологический институт пищевой промышленности (КемТИПП). - Кемерово : КемТИПП, 2008. - 164 с. : ил., табл.; 20 см.; ISBN 978-5-89289-509-5

11. Рябова Е.А. Непрерывное смешивание сыпучих материалов в условиях высокой неоднородности подачи отдельных компонентов : диссертация ... кандидата технических наук : 05.17.08 / Рябова Екатерина Алексеевна; [Место защиты: Тамб. гос. техн. ун-т]. - Тамбов, 2016. - 140 с.

12. Баранцева Е.А. Исследование процессов непрерывного смешения сыпучих материалов и разработка метода их расчета на основе теории цепей Маркова : диссертация ... кандидата технических наук : 05.17.08. - Иваново, 2003. - 108 с.

13. Свешников А.А. Прикладные методы теории Марковских процессов. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2007. – 189 с. ISBN 978-5-8114-0719-4

14. Karthik T., Murugana R. Spinnability of cotton/milkweed blends on ring, compact and rotor spinning systems. Indian Journal of Fibre & Textile Research Vol 41, March 2016, pp. 26-32.

References

1. Sevost'janov A.G. Sostavlenie smesok i smeshivanie v hlopkoprjadil'nom proizvodstve: (Teoriya i praktika) [Mixing and blending in the cotton spinning industry. Theory and practice]. Moskva : Gizlegprom, 1954. 192 p.

2. Sevost'janov P.A. Dinamika i modeli osnovnyh processov prjadenija : ryhlenie, ochistka, smeshivanie, kardo- i grebnechesanie, vytjagivanie, diskretizacija, shtapelirovanie, kruchenie, namotka, peremotka [Dynamics and models of the main spinning processes: loosening, cleaning, mixing, carding and combing, stretching, sampling, stapling, twisting, winding, rewinding]. Moskva: Klub-Pechati, 2021. 591 p. ISBN 978-5-9904852-5-9.

3. Zhong Z., Wang Y., Wu J., Chen R., Ling L., Zhu R.. Indian Journal of Fibre & Textile Research Vol. 39, September 2014, pp. 326-328.

4. Chaundhuri A., Majumdsar P.K. Indian Journal of Fibre & Textile Research, Vol.40, Marth 2015, pp.36-42.

5. Subramanian S., Vaidheeswaran S., Pradeep S., Uthaman P. Comparison of polyester-cotton blended yarns produced by blending of polyester with semi-combed and super-carded cotton fibres. Indian Journal of Fibre & Textile Research, Vol.40, Marth 2015, pp.31-35.

6. Sevost'janov P.A., Vinichenko S.N. Inzhenernyj vestnik Dona, 2024, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2024/9041

7. Vinichenko S.N., Sevost'janov P.A., Masanov D.V. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. 2024. № 3(411). pp. 213-217.

8. Al'zurfi M.K.A., Leonova A.N., Horoshev A.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2025, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2025/9830

9. Sorokanich S.V., Paramonova A.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2025, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2025/9747

10. Bakin I.A. Matematicheskoe modelirovanie na osnove stohasticheskogo podhoda processa smeshivanija dispersnyh materialov [Mathematical modeling based on the stochastic approach of the process of mixing dispersed materials]. Federal'noe agentstvo po obrazovaniju, Kemerovskij

tehnologicheskij in-t pishhevoj prom-sti (KemTIPP). Kemerovo: KemTIPP, 2008. - 164 p. ISBN 978-5-89289-509-5

11. Rjabova E.A. Nepreryvnoe smeshivanie sypuchih materialov v uslovijah vysokoj neodnorodnosti podachi otдел'nyh komponentov [Continuous mixing of bulk materials in conditions of high heterogeneity of the individual components]: dissertacija ... kandidata tehniceskikh nauk: 05.17.08. Tambov, 2016. 140 p.

12. Baranceva E.A. Issledovanie processov nepreryvnogo smeshenija sypuchih materialov i razrabotka metoda ih rascheta na osnove teorii cepej Markova [Investigation of the processes of continuous mixing of bulk materials and development of a method for their calculation based on the theory of Markov chains]: dissertacija ... kandidata tehniceskikh nauk : 05.17.08. Ivanovo, 2003. 108 p.

13. Sveshnikov A.A. Prikladnye metody teorii markovskih processov [Applied methods of Markov process theory]. Sankt-Peterburg : Lan', 2007. 189 p. ISBN 978-5-8114-0719-4

14. Karthik T., Murugana R. Indian Journal of Fibre & Textile Research Vol 41, March 2016, pp. 26-32.

Дата поступления: 7.01.2025

Дата публикации: 25.02.2025