

## Оценка влияния формы диаграммы деформирования бетона на результаты расчета железобетонных балок

*И.К. Манаенков*

*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет*

**Аннотация:** Нелинейная деформационная модель является достаточно гибким инструментом инженера расчетчика, позволяющим решать широкий спектр задач по проектированию железобетонных конструкций. При этом важными задачами являются выбор диаграммы деформирования материала, наиболее точно отражающий характер работы в принятых условиях, а также оценка влияния вида принятой диаграммы на результаты расчета несущей способности и деформаций конструкции. В статье проведено сравнение результатов расчета несущей способности и кривизны балок в зависимости от формы принятой диаграммы деформирования бетона и конструктивных параметров элемента (высоты сечения и коэффициента армирования).

**Ключевые слова:** нелинейная деформационная модель, диаграмма состояния, изгибаемый элемент, нормальное сечение.

### Введение

Уровень сложности проектных решений, разрабатываемых для современных зданий промышленного и гражданского назначения, требует гибких и простых в использовании инструментов расчета, позволяющих оценить напряженно-деформированное состояние конструктивных элементов на различных этапах нагружения наиболее приближенно к действительной работе. Такую возможность открывают расчеты, основанные на применении нелинейной деформационной модели. Данная методика позволяет: применить единый подход к выполнению расчетов по первой и второй группам предельных состояний [1-3]; рассчитывать сечения произвольной формы при различном распределении армирования [4-5]; учитывать особенности работы высокопрочных бетонов [6-7]; учитывать изменение характера работы материалов ввиду различных условий эксплуатации [8-9] или характера нагружения [10-11]; позволяет учитывать изменение свойств бетона ввиду применения косвенного [12-14] или фибрового армирования [15-17] и др.

---

Для данного метода наиболее важной задачей является выбор диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  наиболее точно отражающий характер работы материала в принятых условиях. Для железобетонных элементов этому вопросу посвящено большое число исследований [18-20], что объясняется широкой вариативностью условий эксплуатации и параметров армирования, влияющих на характер деформирования бетона под нагрузкой. Большой объем существующих исследований по данной тематике свидетельствует об актуальности данного вопроса.

Так как в российских нормах проектирования (СП 63.13330.2018) для бетона предлагается несколько видов диаграмм напряжение-деформация, то необходимо понимать в какой степени форма выбранной диаграммы влияет на результаты расчета. При этом необходимо оценивать влияние отдельно на результаты расчетов несущей способности и отдельно на величину рассчитанных прогибов. Эта необходимость вызвана тем, что для этих расчетов задается различная вероятность отказа [21], что обеспечивается введением в расчет различных значений коэффициентов надежности [22].

Ввиду вышесказанного, целью данного исследования являлось определение влияния формы выбранной диаграммы деформирования бетона на результаты расчетов несущей способности и кривизны железобетонных балок при различных конструктивных параметрах.

### **Материалы и методы**

При выполнении расчетов по деформационной модели сечение элемента делится на относительно малые участки, в пределах которых напряжения и деформации принимаются постоянными (Рис. 1).

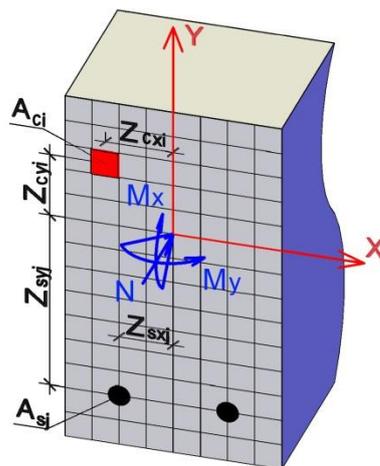


Рис. 1. – Схема разбиения поперечного сечения железобетонного элемента

Для сечения, в котором действуют усилия  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ , записывается система уравнений статического равновесия:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D_{11} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{12} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{123} \cdot \varepsilon_0, \\ M_y &= D_{12} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{22} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{23} \cdot \varepsilon_0, \\ N &= D_{13} \cdot \frac{1}{r_x} + D_{23} \cdot \frac{1}{r_y} + D_{33} \cdot \varepsilon_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $1/r_x$  и  $1/r_y$  – кривизны в плоскостях  $XOZ$  и  $YOZ$  соответственно;  $\varepsilon_0$  – относительные деформации в точке начала координат;  $D_{ij}$  – жесткости.

Уравнения (1) решаются относительно  $1/r_x$ ,  $1/r_y$ ,  $\varepsilon_0$ , после чего пересчитываются жесткости  $D_{ij}$  в зависимости от текущего распределения напряжений и деформаций в поперечном сечении элемента. Путем итераций расчет повторяют до достижения требуемой точности. При этом связь между деформациями и напряжениями устанавливается в соответствии с принятыми диаграммами работы материала. В СП 63.13330.2018 для бетона предлагается 3 вида диаграмм состояния (Рис. 2).

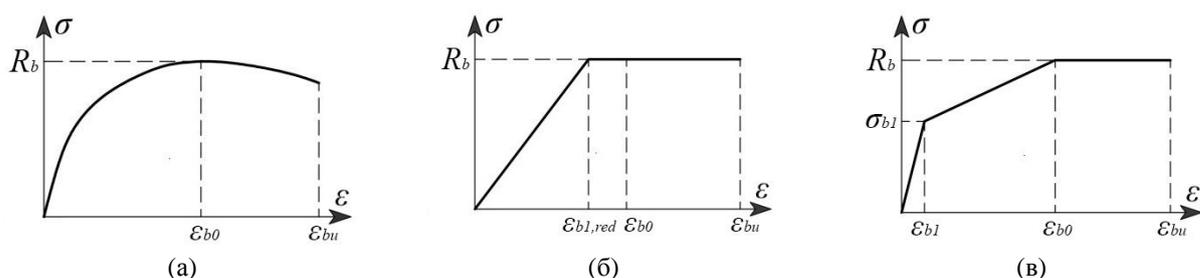


Рис. 2 – Стандартные формы диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  для бетона: (а) криволинейная диаграмма; (б) трехлинейная диаграмма; (в) двухлинейная диаграмма

Были выполнены расчеты железобетонных балок с различными конструктивными параметрами. Рассматривался изгиб балки в вертикальной плоскости:  $N = 0$ ;  $M_x = 0$ ;  $M_y = M$ ;  $1/r_x = 0$ ;  $1/r_y = 1/r$ . В расчетах менялись коэффициент армирования  $\mu$  и высота сечения  $h$ . Схему поперечного сечения элемента см. Рис. 3.

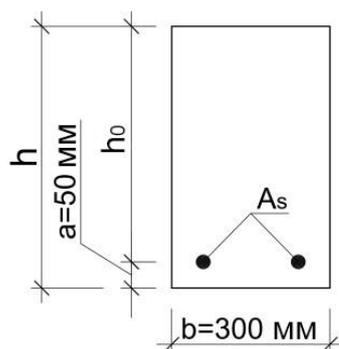


Рис. 3. – Схема поперечного сечения балки

Для бетона принят класс В25 с расчетным значением призмочной прочности  $R_b = 14,5$  МПа, для арматуры принят класс А500 с расчетным значением прочности  $R_s = 435$  МПа. Расчеты выполнялись для всех трех вариантов формы диаграмм  $\sigma$ - $\varepsilon$  бетона, для арматуры во всех случаях принята двухлинейная диаграмма  $\sigma$ - $\varepsilon$ .

### Результаты и выводы

Вычисленные значения несущей способности балок в зависимости от принятой диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  бетона представлены в таблице 1. Сравнение

результатов выполнялось со значениями, полученными по результатам расчета с использованием криволинейной диаграммы, как наиболее точно описывающей реальную работу материала.

Потеря несущей способности балок с коэффициентом армирования 0,01 фиксировалась после перехода растянутой арматуры в стадию текучести, а для балок с коэффициентами армирования 0,02 и 0,03 после достижения бетоном сжатой зоны предельной сжимаемости при работе арматуры в упругой стадии.

Таблица № 1

Несущая способность балок

$\mu$	$h$ , мм	Криволинейная диаграмма	Трехлинейная диаграмма		Двухлинейная диаграмма	
		$M_{ult}$ , кНм	$M_{ult,3}$ , кНм	$\frac{M_{ult,3} - M_{ult}}{M_{ult}} \cdot 100\%$	$M_{ult,2}$ , кНм	$\frac{M_{ult,2} - M_{ult}}{M_{ult}} \cdot 100\%$
0,01	300	68,6	68,3	-0,44	68,9	0,44
	600	333,5	333,2	-0,09	334,0	0,15
	900	796,2	795,7	-0,06	797,7	0,19
0,02	300	104,6	105,0	0,38	102,5	-2,01
	600	507,6	511,7	0,81	497,9	-1,91
	900	1210,8	1221,3	0,87	1188,8	-1,82
0,03	300	111,1	112,2	0,99	108,6	-2,25
	600	536,3	542,0	1,06	527,8	-1,58
	900	1280,8	1294,6	1,08	1261,7	-1,49

Для рассмотренных образцов разница в результатах при различной форме диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  получена в пределах 2,25%, что является незначительным при определении расчетной несущей способности. Это свидетельствует о том, что любая из рассмотренных диаграмм подходит для определения несущей способности балок в инженерных расчетах.

Результаты расчета кривизны балок представлены в графической форме на Рис. 4. Разница значений кривизны  $1/r$  на различных этапах нагружения представлена в графической форме на Рис. 5.

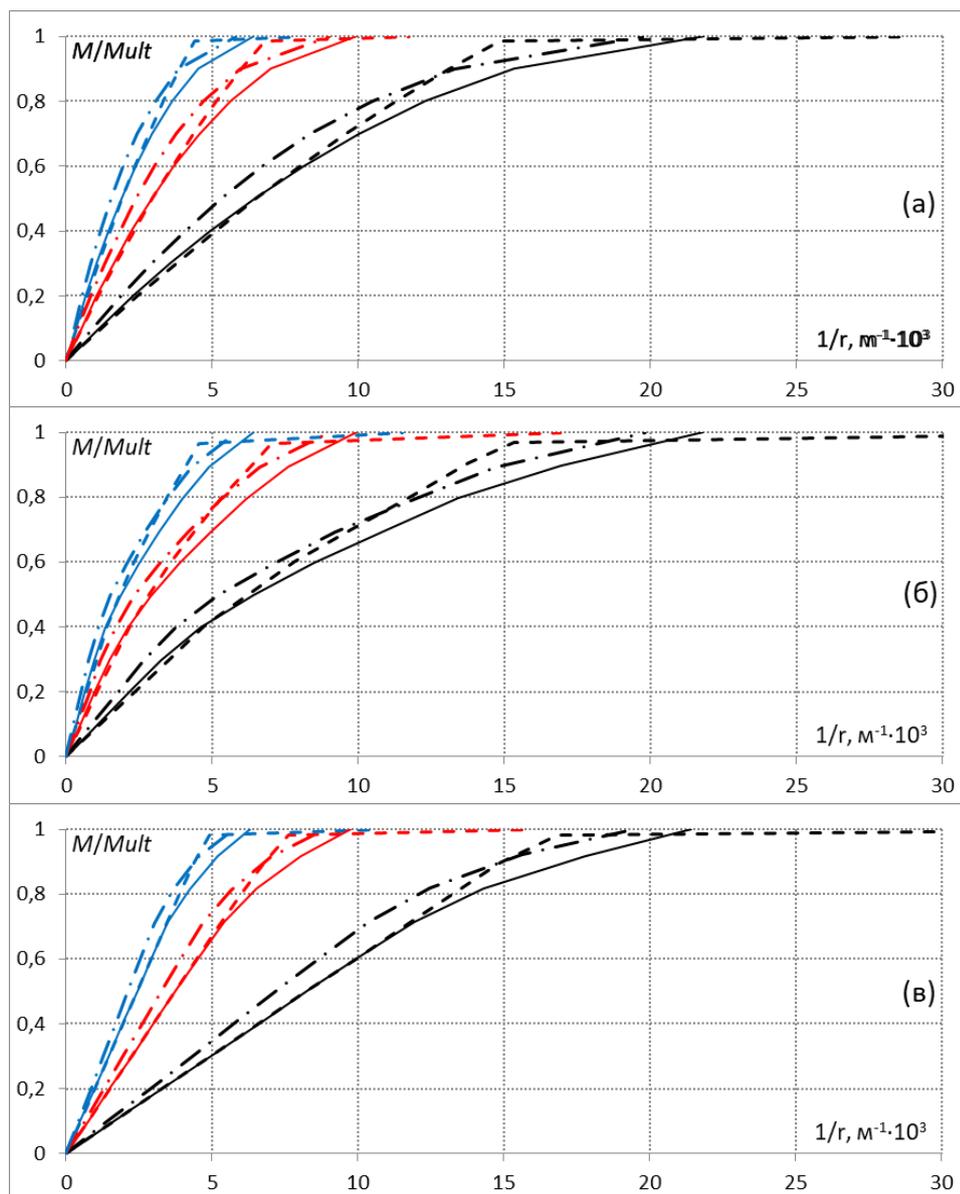


Рис. 4 – Зависимость результатов расчета кривизны  $1/r$  от относительной величины изгибающего момента  $M/M_{ult}$ :

- (а) криволинейная диаграмма; (б) трехлинейная диаграмма; (в) двухлинейная диаграмма;
- $\mu = 0,01$ ,  $h = 300$  мм; — —  $\mu = 0,02$ ,  $h = 300$  мм; - · -  $\mu = 0,03$ ,  $h = 300$  мм;
  - - -  $\mu = 0,01$ ,  $h = 600$  мм; — —  $\mu = 0,02$ ,  $h = 600$  мм; - · -  $\mu = 0,03$ ,  $h = 600$  мм;
  - - -  $\mu = 0,01$ ,  $h = 900$  мм; — —  $\mu = 0,02$ ,  $h = 900$  мм; - · -  $\mu = 0,03$ ,  $h = 900$  мм

Стоит отметить, что для балок с  $\mu = 0,01$  после перехода арматуры в пластическую стадию работы по результатам расчета получен небольшой рост несущей способности (в пределах 3,2 %), сопровождаемый быстрым нарастанием кривизны. Это можно объяснить перераспределением

напряжений в бетоне сжатой зоны при текучести растянутой арматуры. Так как рост незначительный, то рекомендуется при однорядном размещении арматуры ограничивать напряжения и, соответствующие им деформации, пределом текучести. Это позволяет не допустить больших пластических деформаций, а также значительно уменьшить число расчетных итераций, требующихся для достижения заданной точности.

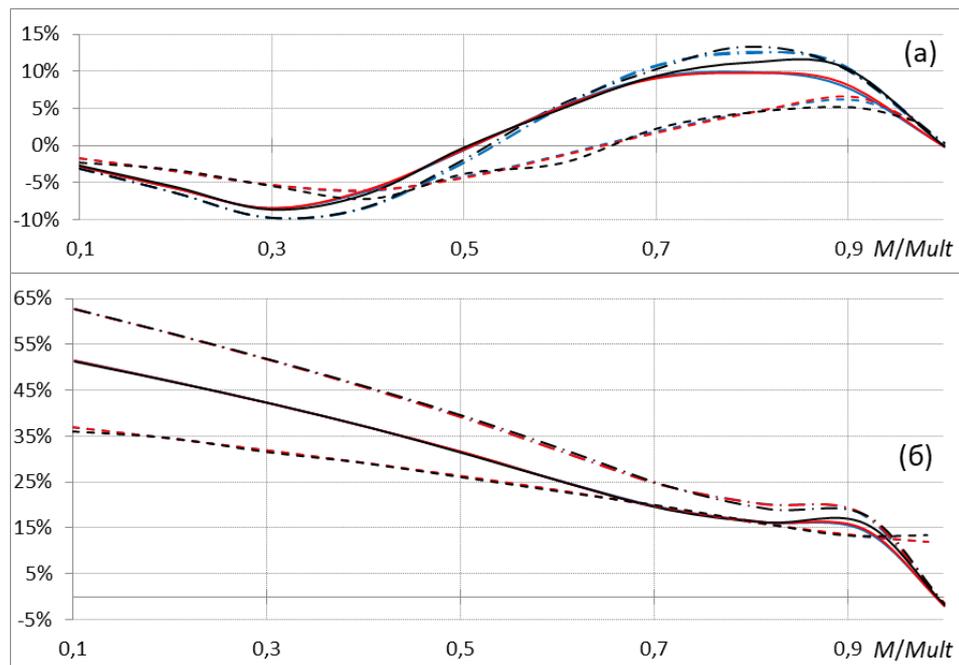


Рис. 5 – Сравнение результатов расчета кривизны на различных этапах нагружения:

- (а) сравнение трехлинейной зависимости с криволинейной  $\frac{1/r_2 - 1/r}{1/r} \cdot 100\%$  ;  
 (б) сравнение двухлинейной зависимости с криволинейной  $\frac{1/r_3 - 1/r}{1/r} \cdot 100\%$  ;  
 - - - -  $\mu = 0,01$ ,  $h = 300$  мм; — —  $\mu = 0,02$ ,  $h = 300$  мм; - · - ·  $\mu = 0,03$ ,  $h = 300$  мм;  
 - - - -  $\mu = 0,01$ ,  $h = 600$  мм; — —  $\mu = 0,02$ ,  $h = 600$  мм; - · - ·  $\mu = 0,03$ ,  $h = 600$  мм;  
 - - - -  $\mu = 0,01$ ,  $h = 900$  мм; — —  $\mu = 0,02$ ,  $h = 900$  мм; - · - ·  $\mu = 0,03$ ,  $h = 900$  мм

Из графиков видно, что отличие кривизны для трехлинейной диаграммы для рассмотренных элементов на начальных этапах нагружения несколько занижено (в пределах 9,8%), а на поздних этапах завышено (в пределах 13,3%).

Для двухлинейной диаграммы выявлено значительное превышение вычисленных значений кривизны. И на начальных этапах нагружения разница может достигать 62,8%.

Высота сечения практически не влияет на разницу в результатах расчета кривизны, вследствие этого линии на Рис. 5 практически сливаются. При этом с увеличением коэффициента армирования разница в результатах расчета кривизн увеличивается как для двухлинейной, так и для трехлинейной диаграммы. Это можно объяснить достижением больших значений деформаций в бетоне сжатой зоны, а, следовательно, большим влиянием формы принятой диаграммы деформирования.

### Литература

1. Карпенко Н.И., Карпенко С.Н. О диаграммной методике расчета деформаций стержневых элементов и ее частных случаях // Бетон и железобетон. 2012. № 6. С. 20–27.
2. Трекин Н.Н., Кодыш Э.Н., Трекин Д.Н. Расчет по образованию нормальных трещин на основе деформационной модели // Промышленное и гражданское строительство. 2016. № 7. С. 74-78.
3. Арленинов П.Д., Крылов С.Б. современное состояние нелинейных расчетов железобетонных конструкций // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2017. № 3. С. 50-53.
4. Колчунов Вл.И., Никулин А.И., Обернихин Д.В. Особенности сопротивления и алгоритм расчета ширины раскрытия трещин железобетонных конструкций трапециевидного поперечного сечения // Вестник белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2018. № 12. с. 21-33.
5. Obernikhin D.V., Nikulin A.I. Experimental studies of deflections in bending reinforced concrete elements taking into account the influence of the

shape of their cross-section. Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 151. Pp. 56-62.

6. Мкртчян А.М., Аксенов В.Н. Аналитическое описание диаграммы деформирования высокопрочных бетонов // Инженерный вестник Дона. 2013. № 3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1818](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1818)

7. Fedorova N., Medyankin M., Fedoro S. Strength of heavy concrete during static-dynamic deformation. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2021. Vol. 1030. No. 1. P. 012046. URL: [iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/1030/1/012046/pdf](http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/1030/1/012046/pdf)

8. Трекин Н.Н., Онана Онана Ж. Использование деформационной модели для определения трещиностойкости изгибаемых элементов с учетом повышенных температур // Промышленное и гражданское строительство. 2017. № 6. С. 34-38.

9. Карпенко Н.И., Ярмаковский В.Н., Карпенко С.Н., Кадиев Д.З. О диаграммном методе определения параметрических точек процесса микротрещинообразования в бетонных элементах при осевом сжатии в условиях действия низкой отрицательной температуры // Жилищное строительство. 2019. № 6. С. 3-9.

10. Плевков В.С., Белов В.В., Балдин И.В., Невский А.В. Модели нелинейного деформирования углеродофибробетона при статическом и кратковременном динамическом воздействиях // Вестник гражданских инженеров. 2016. № 3 (56). С. 72-82.

11. Колчунов В.И., Колчунов Вл.И., Федорова Н.В. Деформационные модели железобетона при особых воздействиях // Промышленное и гражданское строительство. 2018. № 8. С. 54-60.

12. Krishan A.L., Narkevich M.Yu., Sagadatov A.I., Rimshin V.I. The strength of short compressed concrete elements in a fiberglass shell. Magazine of Civil Engineering. 2020. № 2 (94), pp. 3-10.

---

13. Manaenkov I.K., Korenkov P.A., Grezeva A.S., Zinoveva E.A. Calculation of deformations of concrete with indirect reinforcement according to limit state design. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 869. No. 1. P. 052033. URL: [iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/869/5/052033/pdf](https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/869/5/052033/pdf)

14. Chang W., Hao M.J., Zheng W.Z. Compressive behavior of UHPC confined by both spiral stirrups and carbon fiber-reinforced polymer (CFRP). Construction and Building Materials. 2020. 230, p. 117007.

15. Folino P., Ripani M., Xargay H., Rocca N. Comprehensive analysis of fiber reinforced concrete beams with conventional reinforcement. Engineering Structures. 2020. 202, p. 109862.

16. Korsun V., Mashtaler S., Vatin N., Korsun A., Franchi A., Crespi P. The strength and strain of high-strength concrete elements with confinement and steel fiber reinforcement including the conditions of the effect of elevated temperatures. Procedia Engineering. 2015. №117, pp. 970-979.

17. Hou C.C., Zheng W.Z., Chang W. Behaviour of high-strength concrete circular columns confined by high-strength spirals under concentric compression. Journal of Civil Engineering and Management. 2020. № 6 (26), pp 564-578.

18. Резван И.В., Маилян Д.Р., Резван А.В. Построение диаграммы "напряжения-деформации" бетона в условиях пассивного бокового обжатия // Инженерный вестник Дона. 2012. № 4-1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1127](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1127)

19. Attard M., Samani A.K. A stress–strain model for uniaxial and confined concrete under compression. Eng. Struct. 2012. №41, pp 335-349.

20. Manaenkov I.K., Savin S.U. Numerical analysis of the ultimate compressibility of concrete with indirect reinforcement for plotting a stress-strain diagram. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2021. Vol. 1030. No. 1. P. 012090. URL: [iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/1030/1/012090/pdf](https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/1030/1/012090/pdf)

---

21. Тамразян А.Г. Оценка риска и надежности несущих конструкций и ключевых элементов - необходимое условие безопасности зданий и сооружений // Вестник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко "Исследования по теории сооружений". 2009. № 1. С. 160-171.

22. Перельмутер А.В., Кабанцев О.В., Пичугин С.Ф. Основы метода расчетных предельных состояний. М: Издательство АСВ, 2019. 240 с.

### References

1. Karpenko N.I., Karpenko S.N. Beton i zhelezobeton. 2012. №6, pp. 20–27.
2. Trekin N.N., Kody`sh E`.N., Trekin D.N. Promy`shlennoe i grazhdanskoe stroitel`stvo. 2016. №7, pp. 74-78.
3. Arleninov P.D., Kry`lov S.B. Sejsmostojkoe stroitel`stvo. Bezopasnost` sooruzhenij. 2017. №3, pp. 50-53.
4. Kolchunov V.I., Nikulin A.I., Obernixin D.V. Vestnik belgorodskogo gosudarstvennogo texnologicheskogo universiteta im. V.G. Shuxova. 2018. №12, pp. 21-33.
5. Obernikhin D.V., Nikulin A.I. Lecture Notes in Civil Engineering. 2021. Vol. 151. Pp. 56-62.
6. Mkrtchyan A.M., Aksenov V.N. Inzhenernyj vestnik Dona. 2013. № 3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1818](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1818)
7. Fedorova N., Medyankin M., Fedoro S. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2021. Vol. 1030. No. 1. P. 012046. URL: [iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/1030/1/012046/pdf](http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/1030/1/012046/pdf)
8. Trekin N.N., Onana Onana Zh. Promy`shlennoe i grazhdanskoe stroitel`stvo. 2017. №6. pp. 34-38.
9. Karpenko N.I., Yarmakovskij V.N., Karpenko S.N., Kadiev D.Z. Zhilishhnoe stroitel`stvo. 2019. №6, pp. 3-9.
10. Plevkov V.S., Belov V.V., Baldin I.V., Nevskij A.V. Vestnik grazhdanskix inzhenerov. 2016. №3 (56), pp. 72-82.



11. Kolchunov V.I., Kolchunov V.I., Fedorova N.V. *Promy`shlennoe i grazhdanskoe stroitel`stvo*. 2018. №8, pp. 54-60.
  12. Krishan A.L., Narkevich M.Yu., Sagadatov A.I., Rimshin V.I. *Magazine of Civil Engineering*. 2020. № 2 (94), pp. 3-10.
  13. Manaenkov I.K., Korenkov P.A., Grezeva A.S., Zinoveva E.A. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2020. Vol. 869. No. 1. P. 052033. URL: [iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/869/5/052033/pdf](https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/869/5/052033/pdf)
  14. Chang W., Hao M.J., Zheng W.Z. *Construction and Building Materials*. 2020. 230, p. 117007.
  15. Folino P., Ripani M., Xargay H., Rocca N. *Engineering Structures*. 2020. 202, p. 109862.
  16. Korsun V., Mashtaler S., Vatin N., Korsun A., Franchi A., Crespi P. *Procedia Engineering*. 2015. №117, pp. 970-979.
  17. Hou C.C., Zheng W.Z., Chang W. *Journal of Civil Engineering and Management*. 2020. № 6 (26), pp. 564-578.
  18. Rezvan I.V., Mailyan D.R., Rezvan A.V. *Inzhenernyj vestnik Dona*. 2012. № 4-1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1127](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1127)
  19. Attard M., Samani A.K. *Eng. Struct.* 2012. №41, pp 335-349.
  20. Manaenkov I.K., Savin S.U. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2021. 1030, 012090. URL: [iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/1030/1/012090/pdf](https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/1030/1/012090/pdf)
  21. Tamrazyan A.G. *Vestnik CzNIISK im. V.A. Kucherenko "Issledovaniya po teorii sooruzhenij"* 2021. Vol. 1030. No. 1. P. 012090.
  22. Perel`muter A.V., Kabancev O.V., Pichugin S.F. *Osnovy` metoda raschetny`x predel`ny`x sostoyanij*. [Basis of the method of limit state design] (ASV Publishing, Moskva, 2019.), 240 p.
-