

## Исследование взаимодействия колеса с опорным основанием

*Т.Д. Дмитриева, А.С. Котков, А.А. Васильев, М.В. Сидоров, А.И. Пономарев*

*Калужский филиал «Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана», Калуга*

**Аннотация:** В статье описано исследование поведения вектора реакции в пятне контакта колеса с опорным основанием при вариации значений угла поворота ведущих колес. Для нахождения зависимости величин была создана модель MATLAB Simulink с программными блоками, позволяющими определить поведения вектора реакции в пятне контакта колеса с опорным основанием при вариации значений угла поворота ведущих колес.

**Ключевые слова:** управляемость, математическая модель, колесная машина, моделирование, шина колеса, угол поворота колеса, MATLAB Simulink.

**Введение.** Из всего многообразия движения колеса в настоящее время широко изучены такие основные режимы движения колеса, как ведущий, ведомый и тормозной. Однако большинство публикаций посвящены взаимодействию колеса с опорной поверхностью при прямолинейном движении колесной машины, или при криволинейном движении, но относительно неподвижной системы координат, жестко связанной с опорной поверхностью. В реальных условиях поворот колеса происходит относительно корпуса колесной машины и изучение изменения нагрузки для ведущего режима управляемого колеса имеет определенный интерес при создании механизма управления траекторией движения колесной машины.

**Цель данной работы** - анализ зависимости реакции в пятне контакта колеса с опорным основанием при вариации значений угла поворота ведущих колес с помощью модели в программе MATLAB Simulink. Данное исследование позволит уточнить нагрузки, возникающие при взаимодействии колеса с опорной поверхностью при повороте управляемых колес с учетом криволинейного движения, что позволит найти оптимальный угол поворота колёс, а также разработать наиболее приемлемый механизм управления поворотом [1, 2].

---

**Методы.** Для проведения исследования рассмотрим схему одного колеса из многоосного автомобиля и его взаимодействие с опорным основанием. Воспользуемся тремя системами координат [3-5]: неподвижную систему координат (НСК)  $X_2O_2Y_2$ , подвижную систему координат (ПСК)  $OXY$  и микроподвижную систему координат (МПСК)  $O_TX_TY_T$  (рис. 1).

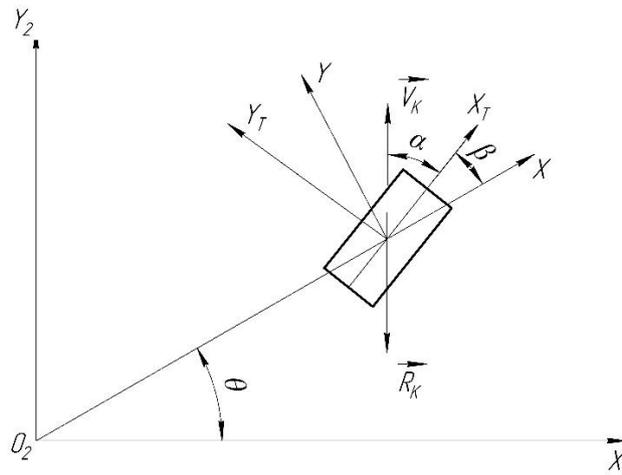


Рис. 1. - Схема взаимоположения осей неподвижной системы координат, подвижной системы координат и микроподвижной системы координат:  $V_k$  – поступательная скорость колеса;  $\alpha$  – угол между осью  $X_T$  микроподвижной системы координат и поступательной скоростью колеса;  $\beta$  – угол поворота колеса;  $\Theta$  – угол направления движения;  $\vec{R}_k$  – реакция со стороны опорного основания на колесо

Вектор реакции со стороны опорного основания в плоскости  $X_2O_2Y_2$  определим, согласно формуле [6, 7]:

$$\vec{R}_{Ki} = -\mu_s |N_i| \frac{\vec{V}_{CKi}}{|V_{CKi}|}$$

где  $\mu_s$  – коэффициент сцепления;  $N_i$  – нормальная реакция со стороны опорной поверхности в неподвижной системе координат;  $\vec{V}_{CKi}$  – вектор поступательной скорости колеса в неподвижной системе координат.

Коэффициент сцепления при частичном скольжении колеса:

$$\mu_s = \mu_{smax} \left( 1 - e^{\frac{s_k}{s_0}} \right) \left( 1 + e^{s_1} \right)$$

где  $\mu_{smax}$  – максимальное значение коэффициента сцепления;  $S_k$  – коэффициент скольжения;  $S_0$  и  $S_1$  – постоянные значения.

Коэффициент скольжения [8]:

Коэффициент скольжения [8]:

$$S_k = \frac{V_{kX_T} - \omega_k r_d}{\omega_k r_d},$$

где  $V_{kX_T}$  – проекция поступательной скорости колеса на ось  $X_T$  МПСК;

$\omega_k$  – угловая скорость колеса;  $r_d$  – динамический радиус колеса.

Проекции вектора поступательной скорости центра колеса в МПСК:

$$V_{kX_T} = V_{kX} \cos \beta + V_{kY} \sin \beta;$$

$$V_{kY_T} = -V_{kX} \sin \beta + V_{kY} \cos \beta;$$

где  $V_{kX}$ ,  $V_{kY}$  и  $V_{kZ}$  – проекции поступательной скорости колеса на ось  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  подвижной системы координат;  $\beta$  – угол поворота колеса.

Скорость скольжения колеса в микроподвижной системе координат можно определить:

$$V_{СК} = \sqrt{V_{X_{СК}}^2 + V_{Y_{СК}}^2}$$

$$V_{X_{СК}} = V_{kX_T} - \omega_k \cdot r_d$$

$$V_{Y_{СК}} = V_{kY_T}$$

Проекции реакции взаимодействия шины с опорным основанием в микроподвижной системе координат на оси  $X_T$  и  $Y_T$ :

$$R_{kX_T} = R_k \cos \alpha$$

$$R_{kY_T} = R_k \sin \alpha$$

Проекции реакции взаимодействия шины с опорным основанием в подвижной системе координат на оси  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ :

$$R_{кX} = R_{кX_T} \cos \beta - R_{кY_T} \sin \beta;$$

$$R_{кY} = -R_{кX_T} \sin \beta + R_{кY_T} \cos \beta;$$

$$R_{кZ} = R_{кZ_T} \cos \varphi \cos \psi.$$

где  $\varphi$  – угол дифферента;  $\psi$  – угол крена.

Вертикальная реакция от деформируемой шины  $R_{кZ_T}$  состоит из суммы реакций: упругой  $R_{кZ_T}^y$  и амортизирующей  $R_{кKZ_T}^A$ , которые определяются через прогиб  $h_k$  и скорость изменения  $\dot{h}_k$  прогиба шины:

$$R_{кZ_T}^y = R_{кZ_T}^y(h_k);$$

$$R_{кKZ_T}^A = R_{кKZ_T}^A(\dot{h}_k);$$

$$R_{кZ_T} = R_{кZ_T}^y + R_{кKZ_T}^A.$$

где  $h_k$  – прогиб шины;  $\dot{h}_k$  – скорость изменения прогиба в шине;

Для реализации рассмотренной математической модели используем аппарат программы MATLAB Simulink, широко применяющейся при решении подобных задач [9, 10]. Программный блок «TYRE\_FORCES» служит для определения проекций вектора реакции со стороны опорного основания в плоскости  $X_2O_2Y_2$  неподвижной системы координат (рис. 2). Вертикальную проекцию вектора реакции со стороны шины в неподвижной системе координат определяем отдельным блоком (рис. 2).

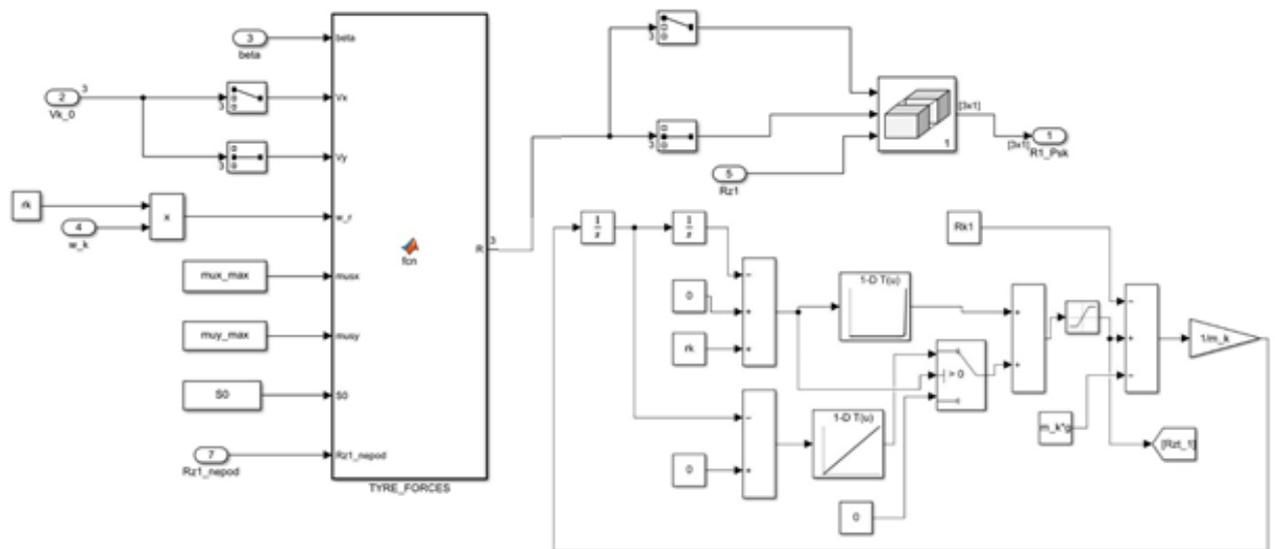


Рис. 2 – Программный блок для определения проекций вектора реакции со стороны опорного основания в плоскости  $X_2O_2Y_2$  неподвижной системы координат

На выходе из программного блока получим:

$R = [R_x; R_y; R_{xt}]$  – вектор реакции со стороны опорного основания,

здесь  $R_x$  и  $R_y$  – проекции реакции в пятне контакта на оси  $X$  и  $Y$  ПСК соответственно;  $R_{xt}$  – проекция реакции в пятне контакта на ось  $X_T$  МПСК.

$R_{Psk}$  – вектор реакции взаимодействия шины первого колеса с опорным основанием в ПСК

В блоке «TYRE\_FORCES» реализуется алгоритм вычисления:

```
function R = fcn(beta,Vx,Vy,w_r,mu_x,mu_y,S0,Rz1_nepod)
%#codegen
S1=0.1;
Vxt=Vx*cos(beta)+Vy*sin(beta); %вычисление проекции V на ось X МПСК
Vyt=-Vx*sin(beta)+Vy*cos(beta); %вычисление проекции V на ось Y МПСК
V_sk=Vxt-w_r; %вычисление проекции скорости скольжения центра колеса на ось X МПСК
Vck=sqrt(Vyt*Vyt+V_sk*V_sk); %вычисление модуля вектора скольжения
%вычисление коэффициента трения частичного скольжения;
if abs(Vck)>0
    sina=Vyt/(sqrt(Vyt*Vyt+V_sk*V_sk));
    cosa=sqrt(1-sina*sina);
else
    sina=0;
    cosa=1;
end
```

```
Sk=V_sk/w_r; %Коэффициент скольжения  
musamax=musx*musy/sqrt(musx^2*sina^2+musy^2*cosa^2); %коэф трения  
полного скольжения в соответствии с эллипсом трения  
mus=musamax*(1-exp(Sk/S0))*(1+exp(Sk/S1)); %коэф частичного трения  
для связных грунтов  
%вычисление реакций  
Rk=-mus*abs(Rz1_nepod)*Vck/abs(Vck);  
Rxt=Rk*cosa; %проекция на ось X МПСК  
Ryt=Rk*sina; %проекция на ось Y МПСК  
Rx=Rxt*cos(beta)-Ryt*sin(beta); %проекция на ось X ПСК  
Ry=-Rxt*sin(beta)+Ryt*cos(beta); %проекция на ось Y ПСК  
R = [Rx;Ry;Rxt]
```

**Результаты.** Изменения реакции в пятне контакта колеса с опорным основанием по осям X, Y и Z, а также результирующей силы реакции, в зависимости от угла поворота колеса, представлены на рис. 3. С увеличением угла поворота колес реакция со стороны опорной поверхности по оси  $X_T$  микроподвижной системы координат пропорционально увеличивается.

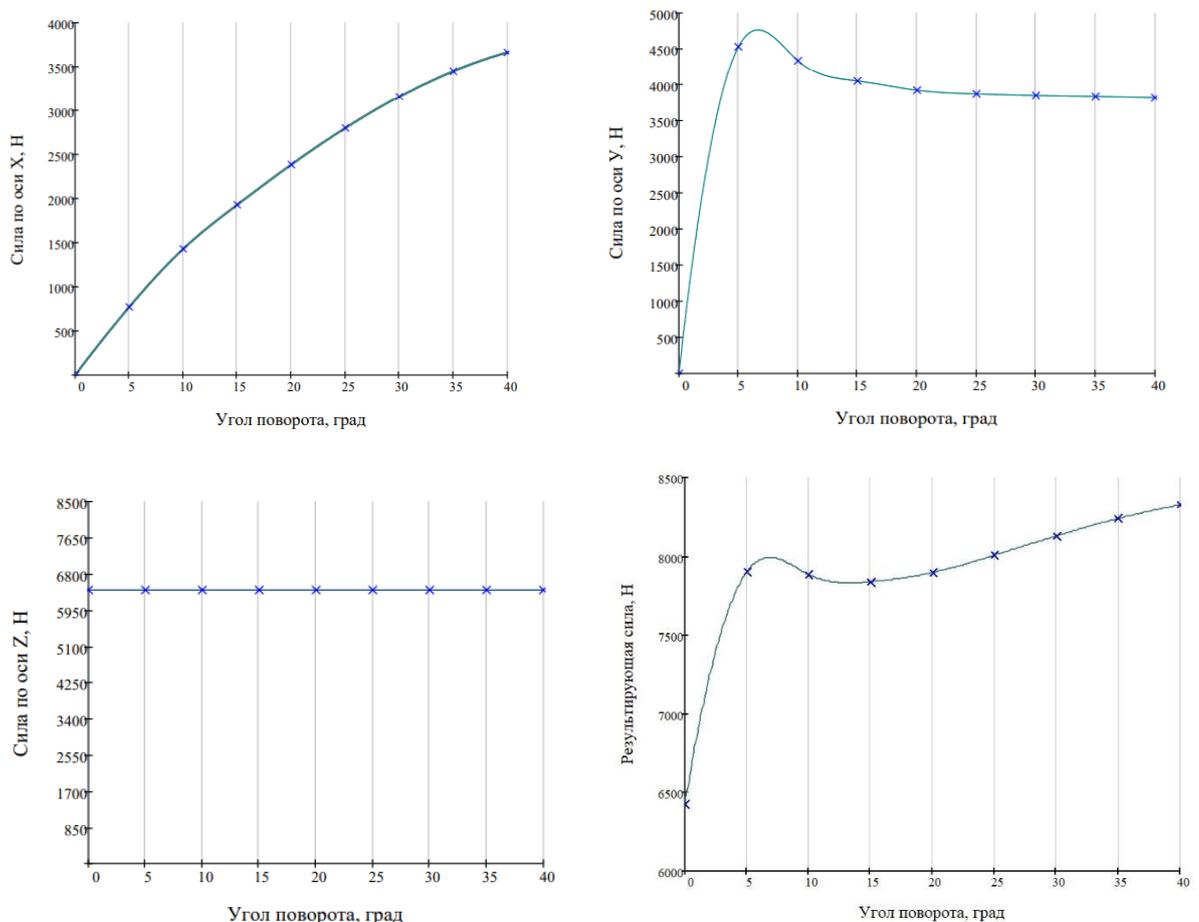


Рис. 3 – Изменения сил по осям и их результирующей в зависимости от угла поворота колеса

Реакция, возникающая со стороны опорной поверхности по оси  $U_T$  микроподвижной системы координат с увеличением угла поворота колес на 5-10 градусов резко возрастает до значения 4532 Н, при дальнейшем повороте колеса она уменьшается и находится в диапазоне от 3800 до 4000 Н. Реакция, возникающая со стороны опорной поверхности по оси  $Z_T$  микроподвижной системы координат не изменяется при увеличении угла поворота колес.

**Выводы.** Анализ полученных результатов позволяет отметить, что при малых углах поворота колеса наблюдается резкое повышенное значения нагрузки на шину, прирост которой в дальнейшем снижается и, при увеличении значения угла поворота более  $40^{\circ}$ , стремится принять постоянное значение.

### Литература

1. Полунгян А.А. Математическая модель динамики трансмиссии колесной машины при движении по твердой неровной дороге // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2003. №4. С. 15-25.
2. Карпов А.А., Карпов М.А., Судейко О.В., Сидоров М.В., Горликов В.А. Моделирование трансмиссии автомобиля с помощью программы Simulink // Инженерный вестник Дона, 2022. №6. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n13y2021/7353.
3. Вольская Н.С., Жилейкин М.М., Захаров А.Ю., Паньшин М.В. Квази-конечная-элементная модель качения эластичного колеса по неровностям деформируемого опорного основания при криволинейном движении колесной машины. // Известия МГТУ «МАМИ». 2018. №2(36). С. 30-40.
4. Скрынников А.В., Шихин А.В., Попов А.А., Сидоров В.Н. Моделирование взаимодействия шины колеса с опорным основанием



опорно-ходового модуля // Инженерный вестник Дона. 2022. №6. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2022/7695](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2022/7695).

5. Полковникова Н.А. Научные и инженерные расчеты в среде Matlab. М.: МОРКНИГА. 2019. 143 с.

6. Попов С.Д. Внешняя механика автомобильного колеса с эластичной шиной. Часть 2: Плоское стационарное качение колеса по плоской твердой опорной поверхности. М: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. 70 с.

7. Wong J.Y. Theory of Ground Vehicles. New York: Wiley IEEE. 2001. 369 с.

8. Агейкин Я.С., Вольская Н.С. Теория автомобиля. М.: МГИУ. 2008. 318 с.

9. Сидорова А.В., Степин П.И., Сидоров В.Н. Имитационное моделирование колебаний центра масс колесной машины с помощью программы Simulink // Инженерный вестник Дона. 2020. №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2020/6395](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2020/6395).

10. Жилейкин М.М. Математические модели систем транспортных средств: методические указания. М: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2018. 100 с.

## References

1. Polungyan A.A. Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Mashinostroenie. 2003. №4. pp. 15-25.

2. Karpov A.A., Karpov M.A., Sudeiko O.V., Sidorov M.V., Gorlikov V.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2022. №6. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n13y2021/7353](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n13y2021/7353).

3. Volskaya N.S., Zhileikin M.M., Zakharov A.Yu., Panshin M.V. Izvestia of MSTU "MAMI". 2018. №2(36). pp. 30-40.

4. Skrynnikov A.V., Shikhin A.V., Popov A.A., Sidorov V.N. Inzhenernyj vestnik Dona, 2022. №6. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2022/7695](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n6y2022/7695)



5. Polkovnikova N.A. Nauchny`e i inzhenerny`e raschety` v srede Matlab [Scientific and engineering calculations in the Matlab environment]. M.: MORKNIGA. 2019. 143 p.

6. Popov S.D. Vneshnyaya mexanika avtomobil`nogo kolesa s e`lastichnoj shinoj. Chast` 2: Ploskoe stacionarnoe kachenie kolesa po ploskoj tverdoj opornoj poverxnosti [External mechanics of an automobile wheel with an elastic tire. Part 2: Flat stationary rolling of a wheel on a flat solid support surface] M.: MGIU. 2011. 70 p.

7. Wong J.Y. Theory of Ground Vehicles. New York: Wiley IEEE. 2001. 369 p.

8. Agejkin Ya.S., Vol`skaya N.S. Teoriya avtomobilya [Theory of the car]. M.: MGIU. 2008. 308 p.

9. Sidorova A.V., Stepin P.I., Sidorov V.N. Inzhenernyj vestnik Dona. 2020. №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2020/6395](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2020/6395).

10. Zhilejkin M.M. Matematicheskie modeli sistem transportny`x sredstv: metodicheskie ukazaniya [Homework for the course "Modeling of vehicle systems": methodical instructions]. M.: MGTU im. N.E. Baumana. 2018. 100 p.