

## Численное исследование устойчивости пологой сферической оболочки, подкрепленной ребрами по контуру, с применением вариационно-разностного метода

*П.А. Гелюх<sup>1</sup>, А.В. Пашков<sup>2</sup>, С.А. Иванов*

*<sup>1</sup>Российский университет транспорта*

*<sup>2</sup>Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет*

**Аннотация:** В статье проведено исследование пологой упругой сферической оболочки на прямоугольном плане, подкрепленной ребрами по контуру, при нагружении равномерно распределенной нагрузкой. Задача решается численно с применением вариационно-разностного подхода, с учетом геометрической нелинейности и деформаций поперечного сдвига оболочки и ребер. Получены зависимости критической нагрузки от жесткостей оболочки и ребер.

**Ключевые слова:** пологая сферическая ребристая оболочка, ребра, устойчивость, геометрическая нелинейность, вариационно-разностный метод, жесткость ребер, соотношение жесткостей, критическая нагрузка.

### Введение

Устойчивость ребристых сферических оболочек исследована в относительно небольшом количестве работ. Большинство из них составляют работы по экспериментальному исследованию устойчивости, в других же предлагаются приближенные методики решения, основанные на теории ортотропных оболочек. В настоящее время, благодаря развитию и широкому распространению метода конечных элементов, также имеются работы по исследованию данного класса оболочек на его основе.

В данной статье исследование производится численно с помощью эффективного алгоритма, разработанного на основе вариационно-разностного метода, позволяющего учитывать геометрическую нелинейность, дискретное расположение ребер и исследовать поведение оболочки в закритическом состоянии. Вариационно-разностный подход сочетается с шаговым нагружением. В статье исследована сферическая оболочка на прямоугольном плане, подкрепленная ребрами только по

контуру. Для оболочки построены зависимости верхней критической нагрузки от жесткостей ребер, включая случаи нулевой и бесконечной жесткости, и жесткости оболочки. Математическая модель построена на основе кинематических соотношений, учитывающих деформации поперечного сдвига. Численный алгоритм реализован в виде программы на языке программирования Fortran.

### Постановка задачи

Вариационно-разностный подход реализуется в комбинации с методом продолжения решения по параметру [1 – 3], с применением численного алгоритма для расчета оболочек с учетом геометрической нелинейности [4, 5]. При этом учитываются деформации поперечного сдвига оболочки, а деформации ребер учитываются только в плоскости, нормальной к срединной поверхности. Данная методика применялась также и для расчетов физически нелинейных оболочек, в том числе для случая упругопластического материала [6, 7]. Для упругого материала функционал полной потенциальной энергии оболочки, занимающей область  $\Omega$ , подкрепленной ребрами с общей длиной центральных осей  $L$ , имеет вид:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\mathbf{N}, \boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega + \frac{1}{2} \iint_L (\mathbf{N}^r, \boldsymbol{\varepsilon}^r) dL - \iint_{\Omega} (\mathbf{q}, \mathbf{u}) d\Omega, \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений оболочки;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – вектор деформаций срединной поверхности;  $\mathbf{N}$  – вектор усилий в оболочке;  $\boldsymbol{\varepsilon}^r$  – вектор деформаций центральной оси ребер;  $\mathbf{N}^r$  – вектор усилий в ребрах;  $\mathbf{q}$  – вектор внешней нагрузки.

Компоненты вектора деформаций центральной оси ребер вычисляются по формулам [7]:

$$\begin{aligned} e_{11}^r &= e_{11}(1 + a\kappa_{11}); & \kappa_{11}^r &= \frac{\kappa_{11}}{1 + a\kappa_{11}}; & e_{13}^r &= e_{13}; \\ e_{22}^r &= e_{22}(1 + a\kappa_{22}); & \kappa_{22}^r &= \frac{\kappa_{22}}{1 + a\kappa_{22}}; & e_{23}^r &= e_{23}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $a$  – эксцентриситет центральной оси сечения ребра относительно срединной поверхности оболочки, по нормали к срединной поверхности;  $e_{11}, e_{22}, e_{12}$  – тангенциальные деформации срединной поверхности,  $\kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}$  – кривизны срединной поверхности,  $e_{13}, e_{23}$  – деформации поперечного сдвига оболочки.

### Методика решения

Условия минимума функционала (1) имеют вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = F(\mathbf{u}, p) = 0, \quad (3)$$

где  $p$  – параметр нагрузки.

Для реализации продолжения решения по параметру на каждом шаге нагружения производится итерационное уточнение решения модифицированным методом Ньютона-Рафсона; дополнительно к уравнениям (3) вводится уравнение вида:

$$F_0(\mathbf{u}, p, s) = 0. \quad (4)$$

В качестве ведущего параметра используется длина дуги кривой равновесных состояний по схеме Крисфилда [8, 9]. В этом случае уравнение (4) имеет вид:

$$\Delta s^2 = \|\Delta \mathbf{u}\|^2 + \Delta p^2,$$

Где  $\Delta s$ ,  $\Delta \mathbf{u}$ ,  $\Delta p$  – приращения соответственно ведущего параметра, вектора перемещений и параметра нагрузки.

Для модифицированного метода Ньютона-Рафсона выполняется пересчет матрицы Гессе через 1-5 итераций.

Компоненты вектора градиента и элементы матрицы Гессе вычисляются по разностным схемам на основе явных выражений [4].

Исследование выполнено для сферической оболочки на прямоугольном плане (см. рис. 1). Главные кривизны оболочки  $k_1 = k_2 = 0,4 \text{ м}^{-1}$ . Размеры оболочки в плане  $a = b = 1,0 \text{ м}$ .

Начальный модуль упругости материала  $E_0 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , коэффициент Пуассона  $\nu_0 = 0,3$ . Оболочка покрывается сеткой прямоугольных ячеек.

Нагрузка на оболочку равномерно-распределенная по всей площади и направлена вдоль оси  $z$  (рис. 1).

Ребра расположены по всем краям оболочки (рис. 1). Схема примыкания ребер к оболочке показана на рис. 2. Расчеты выполнены для ряда прямоугольных сечений ребер (табл. 1), и для ряда толщин оболочки (табл. 2).

Схема оболочки приведена на рис. 1. Опоры в углах оболочки – шарнирно-неподвижные.

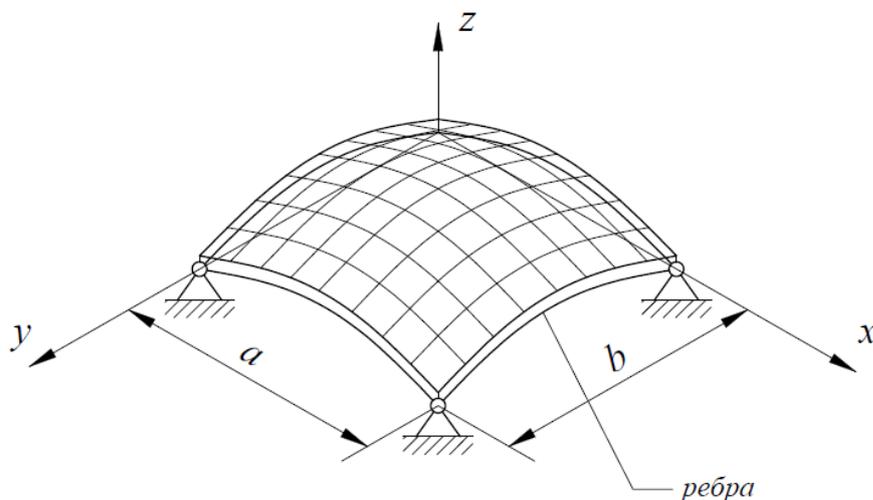


Рис. 1. Схема оболочки



Рис. 2. Схема примыкания ребер

Таблица № 1

Характеристики ребер

№ п/п.	$h_r$ , см	Изгибная жесткость ребер $EJ$ , кНм <sup>2</sup>	Осевая жесткость ребер $EA$ , кН
1	0	0	0
2	1	0,175	$2,1 \cdot 10^4$
3	2	1,40	$4,2 \cdot 10^4$
4	3	4,73	$6,3 \cdot 10^4$
5	4	11,20	$8,4 \cdot 10^4$
6	5	21,88	$10,5 \cdot 10^4$
7	6	37,80	$12,6 \cdot 10^4$
8	8	89,60	$16,8 \cdot 10^4$
9	10	175,0	$21,0 \cdot 10^4$
10	-	$\infty$	$\infty$

Ширина всех ребер  $b_r = 1$  см.

Помимо этого, выполнены расчеты для случаев отсутствия ребер и для случая ребер, абсолютно жестких в своей плоскости (№10 в табл. №1).

Таблица № 2

### Характеристики оболочки

№ п/п.	$h$ , см	Цилиндрическая жесткость $D$ , кНм
1	0,5	2,40
2	1,0	19,23
3	1,5	64,90
4	2,0	153,85
5	2,5	300,48

### Результаты расчета

На рис. 3 приведены зависимости верхней критической нагрузки  $q_{cr}$  от изгибной жесткости ребер; на рис. 4 – зависимость нагрузки от толщины оболочки только для ребер конечной ненулевой жесткости, на рис. 5 – то же, для всех исследованных ребер. На рис. 6 показана зависимость критической нагрузки одновременно от двух указанных параметров в виде трехмерной поверхности.

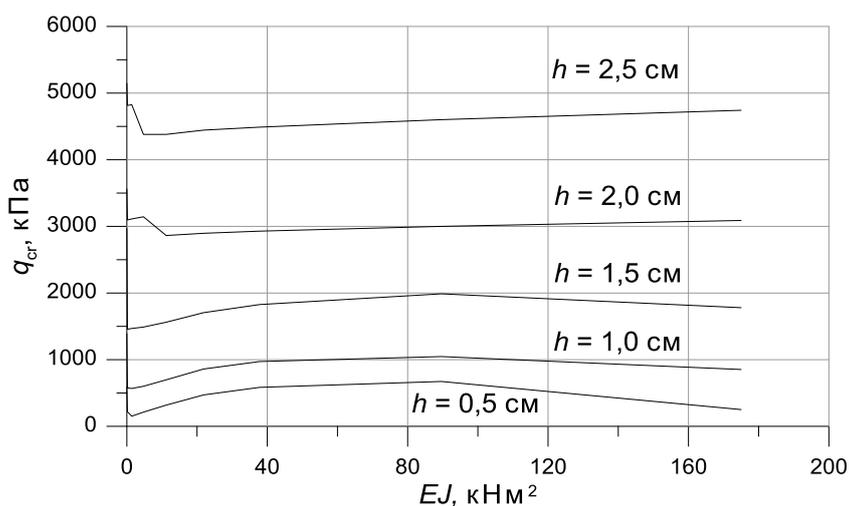


Рис. 3. Зависимость верхней критической нагрузки от изгибной жесткости ребер

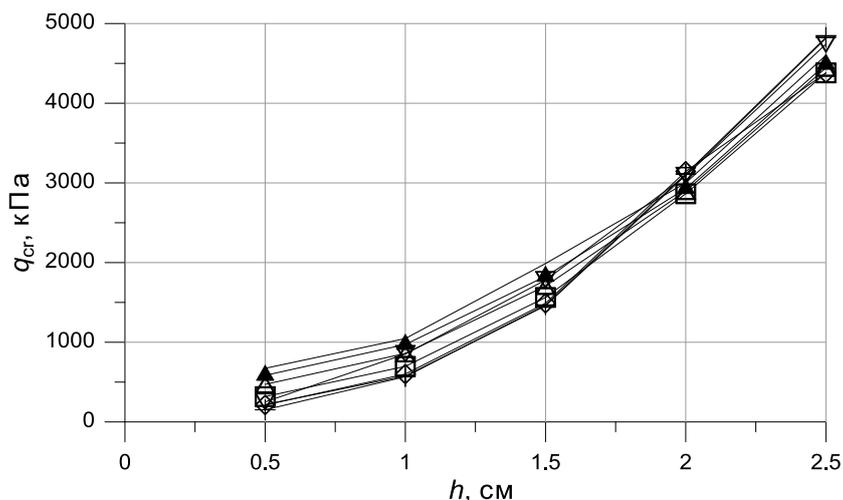


Рис. 4. Зависимость верхней критической нагрузки от толщины оболочки для ребер конечной жесткости. Символами обозначены кривые, соответствующие жесткости ребер, согласно строке в табл. 1: круг - №2, крест - №3, ромб - №4, квадрат - №5, треугольник вершиной вверх - №6, то же, вниз - №7, сплошной ромб - №8, сплошной треугольник - №9.

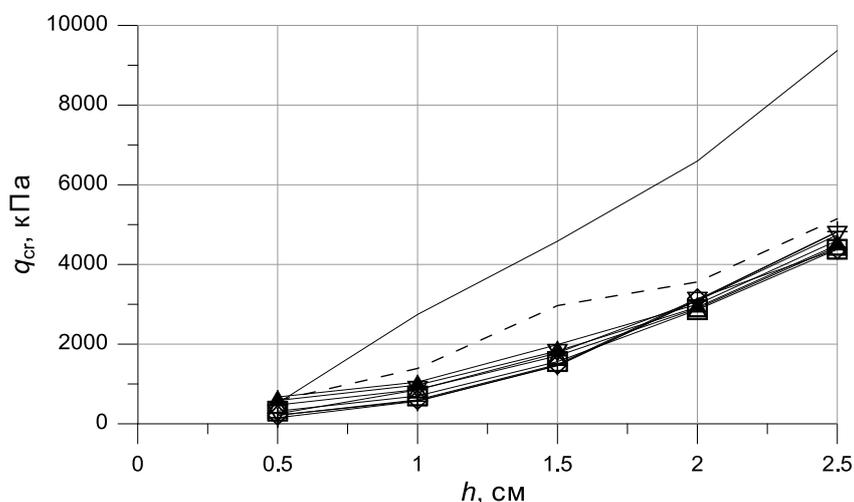


Рис. 5. Зависимость верхней критической нагрузки от толщины оболочки, включая случаи отсутствия ребер и абсолютно жестких ребер. Символьные обозначения точек идентичны приведенным на рис. 4, штриховая линия – оболочка без ребер, сплошная линия без символов – оболочка с бесконечно жесткими ребрами.

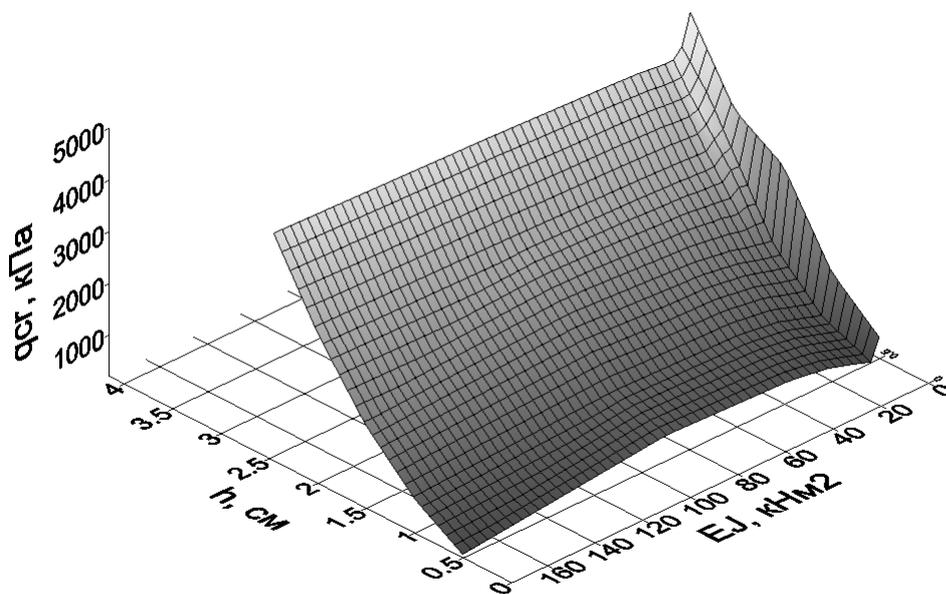


Рис. 6. Поверхность верхней критической нагрузки

### Заключение

С помощью вариационно-разностного подхода получены кривые равновесных состояний и верхние критические нагрузки для симметричной сферической оболочки на прфмоугольном плане, подкреплённой ребрами по контуру. Построены зависимости верхней критической нагрузки от соотношения жесткости оболочки и жесткости ребер.

Результаты показывают, что при увеличении жесткости оболочки критическая нагрузка монотонно возрастает по нелинейному закону при любой жесткости ребер. При постоянной жесткости оболочки зависимость критической нагрузки от жесткости ребер не является монотонной. При введении ребер критическая нагрузка сначала уменьшается по сравнению с таковой для оболочки без ребер; затем, по мере увеличения жесткости ребер, возрастает. При достижении определенного порогового значения жесткости ребер поведение нагрузки начинает зависеть от значения жесткости

оболочки: при ее значении, меньшем некоторого порогового значения, критическая нагрузка начинает убывать, при большем же – возрастать.

Для ребер достаточно малой жесткости, по мере ее возрастания от нуля, несколько раз происходит изменение формы потери устойчивости оболочки. При переходе пороговых значений, упомянутых выше, также происходит изменение формы потери устойчивости.

### Литература

1. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела. М.: Наука, 1988. 232 с.
2. Batoz J.L. and Dhatt G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems // *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.14, 1979, pp. 1262-1266.
3. Meek J.L. and Loganathan S. Geometrically non-linear behaviour of space frame structures // *Computers & Structures*, v.31, 1989, pp. 35-45.
4. Иванов А.С., Трушин С.И. Разработка и оценка вычислительных алгоритмов исследования устойчивости нелинейно деформируемых оболочек // *Строительная механика и расчет сооружений*, 1991, №5. С.53-58.
5. Милейковский И.Е., Сидоров В.Н., Трушин С.И., Булгакова М.В., Кислов В.В. Численные методы расчета оболочек с учетом геометрической и физической нелинейности и деформаций поперечного сдвига // *Теория и экспериментальные исследования пространственных конструкций. Применение оболочек в инженерных сооружениях. Труды Международного Конгресса ИАСС*, М., 1985, т.1, с.580-594.
6. Иванов С.А. Численный анализ деформирования и устойчивости пластин и пологих оболочек с учетом больших перемещений и нелинейной работы материала: дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2012. 133 с.
7. Гелюх П.А., Пашков А.В., Иванов С.А. Численное исследование устойчивости пологой ребристой цилиндрической оболочки с применением

вариационно-разностного подхода // Естественные и технические науки, 2021, №6. С.187-195.

8. Crisfield M.A. A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles “Snap-Through” // Computers & Structures, 1981, Vol.13, N1, pp.55-62.

9. Crisfield M.A. An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations // Int. J. Num. Meth. Engng., 1983, Vol.19, pp.1269-1289.

10. Милейковский И.Е., Трушин С.И. Расчет тонкостенных конструкций. М.: Стройиздат, 1989. 200 с.

11. Петров В. В. Нелинейная инкрементальная строительная механика. Москва : Инфра-Инженерия, 2017. 480 с.

### References

1. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. Problemy nelineynogo deformirovaniya: Metod prodolzheniya resheniya po parametru v nelineynykh zadachakh mekhaniki tverdogo deformiruемого tela. [Problems of non-linear deformation: The parameter continuation method in non-linear problems of the solid mechanics]. М.: Nauka, 1988. 232 p.

2. Batoz J.L. and Dhatt G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. Int. J. Num. Meth. Engng., v.14, 1979, pp. 1262-1266.

3. Meek J.L. and Loganathan S. Geometrically non-linear behaviour of space frame structures. Computers & Structures, v.31, 1989, pp. 35-45.

4. Ivanov A.S., Trushin S.I. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy, 1991, №5. pp.53-58.

5. Mileykovskiy I.E., Sidorov V.N., Trushin S.I., Bulgakova M.V., Kislov V.V. Trudy Mezhdunarodnogo Kongressa IASS, M., 1985, v.1, pp.580-594.

6. Ivanov S.A. Chislennyy analiz deformirovaniya i ustoychivosti plastin i pologikh obolochek s uchetom bol'shikh peremeshcheniy i nelineynoy raboty materiala [A numerical analysis of deformation and stability of plates and shallow



shells, with consideration of large displacements and non-linearity of the material]:  
dis. ... kand. tekhn. nauk. Moskva, 2012. 133 p.

7. Gelyukh P.A., Pashkov A.V., Ivanov S.A. Estestvennyye i tekhnicheskie nauki, 2021, №6, pp.187-195.

8. Crisfield M.A. A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles “Snap-Through”. Computers & Structures, 1981, Vol.13, N1, pp.55-62.

9. Crisfield M.A. An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations. Int. J. Num. Meth. Engng., 1983, Vol.19, pp.1269-1289.

10. Mileykovskiy I.E., Trushin S.I. Raschet tonkostennykh konstruktsiy. [Analysis of thin-walled structures]. M.: Stroyizdat, 1989. 200 p.

11. Petrov V. V. Nelineynaya inkremental'naya stroitel'naya mekhanika [Non-linear incremental structural mechanics]. Moskva: Infra-Inzheneriya, 2017. 480 p.