

Математическое моделирование нелинейных характеристик элементов применительно к задаче реализации двухполюсников с заданными нелинейными зависимостями

В.В. Пивнев¹, С.Н. Басан²

¹Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

²Российский государственный гидрометеорологический университет, филиал в г. Туапсе

Аннотация: В статье предлагается использовать для описания полюсных уравнений нелинейных резистивных двухполюсников соответствующие дифференциальные уравнения. Это упрощает реализацию нелинейных резисторов на базе аналого-цифро-аналогового элемента. Постоянные коэффициенты, входящие в предлагаемую математическую модель рассматриваются как постоянные интегрирования. Поэтому настройка элемента на требуемую вольтамперную характеристику осуществляется путём задания соответствующих начальных условий.

Ключевые слова: нелинейный элемент, математическая модель, полюсное уравнение, дифференциальная форма.

Многие нелинейные электрические цепи, находящие широкое применение в инженерной практике [1-12], в качестве нелинейных элементов содержат нелинейные резисторы. Реализация нелинейных резисторов с заданной вольтамперной характеристикой и требуемой степенью точности испытывает трудности, обусловленные необходимостью подбора выпускаемых промышленностью нелинейных элементов и способа соединения элементов между собой. При таком подходе возникают проблемы в обеспечении идентичности характеристик нелинейных элементов.

Избежать процедуры отладки аппаратной части нелинейного элемента позволяет применение аналого-цифро-аналогового элемента [4, 5]. Реализация требуемой вольтамперной характеристики этим элементом обеспечивается соответствующим программным обеспечением.

Вид требуемых вольтамперных характеристик определяется техническими требованиями и может быть самым разнообразным.

Следовательно, для каждого вида характеристик требуется своё программное обеспечение.

В то же время вольтамперную характеристику нелинейного элемента можно рассматривать как частное решение соответствующего дифференциального уравнения. Частное решение дифференциального уравнения зависит от начальных условий. Следовательно, задавая начальные условия можно, управлять видом вольтамперной характеристики.

Целью работы является представление полюсного уравнения (1) (математической модели) нелинейного резистивного двухполюсника в виде дифференциального уравнения относительно тока i , где коэффициенты A_k и B_k рассматриваются как постоянные интегрирования [9]:

$$u_k = A_k i^{B_k} . \quad (1)$$

Для восстановления дифференциального уравнения по известному решению (1) продифференцируем дважды уравнение (1):

$$u'_k = A_k B_k i^{(B_k - 1)} , \quad (2)$$

$$u''_k = A_k B_k (B_k - 1) i^{(B_k - 2)} . \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) образуют систему, позволяющую выразить в явном виде постоянные интегрирования через напряжение и ток двухполюсника.

Решая систему уравнений (2, 3) относительно постоянных интегрирования A_k и B_k , получим:

$$A_k = \frac{(u'_k)^2}{u''_k i + u'_k} \cdot i^{(1 - \frac{u''_k i + u'_k}{u'_k})} , \quad (4)$$

$$B_k = \frac{u''_k i + u'_k}{u'_k} . \quad (5)$$

В этом выражении символ « \wedge » означает возведение в степень. После

подстановки (4) и (5) в уравнение (1) и выполнив элементарные упрощения, получим уравнение (6):

$$u_k'' \cdot u_k \cdot i + u_k \cdot u_k' - (u_k')^2 \cdot i = 0. \quad (6)$$

Полученное уравнение относится к классу однородных дифференциальных нелинейных уравнений второго порядка и является полюсным уравнением нелинейного резистивного двухполюсника с вольтамперной характеристикой (1), записанного в дифференциальной форме.

Выражение (1) является общим решением уравнения (6). Для нахождения частного решения необходимо определить начальные условия u_0 и u_0' . Начальные условия i_0 , u_0 , u_0' являются зависимыми начальными условиями. В момент коммутации они могут скачком изменить свои значения, которые зависят от внешней по отношению к нелинейному элементу электрической цепи. При включении электрической цепи цифровое устройство фиксирует начальное значение тока (напряжения) элемента непосредственно после коммутации. Затем по уравнениям (7) вычисляются начальные условия:

$$\begin{cases} u_{k0} = A_k i_0 B_k, \\ u_{k0}' = A_k B_k i_0 (B_k - 1) = \frac{u_{k0}}{i_0} B_k. \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим два частных случая, когда в уравнении (1) в качестве постоянной интегрирования рассматривается один из коэффициентов A_k или B_k . Если рассматривать в качестве постоянной интегрирования A_k , то дифференциальное уравнение примет вид:

$$u_k' - \frac{B_k u_k}{i} = 0. \quad (8)$$

В том случае, когда в качестве постоянной интегрирования

рассматривается B_k , математическая модель двухполюсника соответствует уравнение (9):

$$u_k = A_k i^{\wedge} \left(\frac{u'_k i}{u_k} \right). \quad (9)$$

В обоих частных случаях математическая модель представляет собой однородное дифференциальное уравнения первого порядка. Для нахождения частного решения необходимо определять начальные условия, которые являются зависимыми начальными условиями. Их значение зависит от внешней по отношению к нелинейному элементу электрической цепи после коммутации.

В качестве примера рассмотрим расчёт переходного процесса в схеме замещения в нелинейной электрической цепи первого порядка на рис.1.

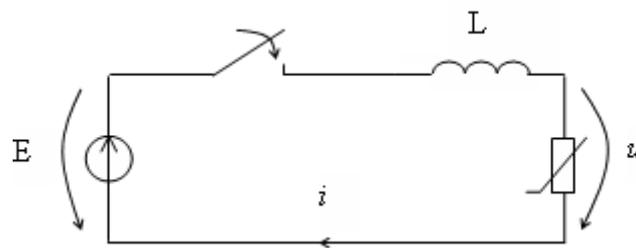


Рис. 1. – Схема замещения нелинейной электрической цепи первого порядка

Пусть, в схеме на рис.1: $E = 5 \text{ В}$, $L = 0.1 \text{ Гн}$, $u = 2i^{0.7} \text{ В}$, тогда

$$u'' \cdot u \cdot i + u'_i \cdot u - (u'_i)^2 \cdot i = 0. \quad (10)$$

Будем считать, что коммутация происходит в нулевой момент времени $t_k = 0$.

Запишем уравнение нелинейного элемента (10) в дифференциальной форме следующим образом (11):

$$u''_i + \frac{(u'_i)^2}{u} - \frac{u'_i}{i} = 0. \quad (11)$$

Уравнения, описывающие процессы в схеме замещения на рис.1, после

коммутации, имеют следующий вид:

$$L \frac{di}{dt} + u(i) = E, \quad (12)$$

$$u_i'' + \frac{(u_i')^2}{u} - \frac{u_i'}{i} = 0. \quad (13)$$

Решим данную систему уравнений явным методом Эйлера, выполнив следующую последовательность действий:

1. Запишем уравнения (12) и (13) в форме Коши (14, 15, 16):

$$\frac{di}{dt} = \frac{E - u(i)}{L}, \quad (14)$$

$$u_i' = \frac{du}{di} = \varphi(i), \quad (15)$$

$$\varphi_i' = \frac{d\varphi}{di} = \frac{\varphi^2}{u} - \frac{\varphi}{i}. \quad (16)$$

2. Определим численные значения независимых начальных условий. В данной схеме (в соответствии с законами коммутации) одно независимое нулевое начальное условие $i(0_+) = i(0_-) = 0$. Все остальные начальные условия являются зависимыми, их значения определяются в процессе решения задачи из уравнений (14, 15, 16). Из полюсного уравнения нелинейного элемента следует, что $u(0_+) = 0$.

3. Выберем шаг интегрирования по времени: $h = 0.0001$ с. Результаты решения будем отображать в таблице 1.

Таблица № 1

Результаты решения задачи

«к» Номер шага	i_k	$\frac{di}{dt} = i_k'$	u_k	φ_k u_{ik}'	φ_{ik}'	Δi_k	$\Delta \varphi_k$	Δu_k
-	(А)	(А/с)	(В)	(Ом)	(Ом/А)	(А)	(Ом)	(В)
0	0	50	0	-	-	0.005	-	-

1	0.005	49.509 87	0.049012 741	6.8617838 65	-411.712 08	0.00495 0987	-2.038 381156	0.033972 6034
2	0.0099 50987	49.170 146966 2	0.082985 30338	4.8234028 5	-204.362 586282	0.00491 7014697	-1.004 85383 88	0.02371 674266
3	0.0148 680017	48.93 297953 96	0.106702 04604	3.8185490 11	-120.17 5492352	0.00489 3297954	-0.588 05449 04	0.018685 29804
4	0.0197 612996	48.7461 265592	0.125387 34408	3.2304945 2081	-80.244 965742	0.00487 461265	-0.391 16312 51	0.015747 60328
-	-	-	-	-	-	-	-	-

4. Из формулы (14) для $t = 0_+$ получаем:

$$i'(0_+) = \frac{E}{L} = \frac{5}{0.1} = 50 \text{ A/c.} \quad (17)$$

5. Приращение тока на нулевом шаге будет равно:

$$\Delta i_0 = i'(0_+) \cdot h = 50 \cdot 0.0001 = 0.005 \text{ A.} \quad (18)$$

6. Далее вычисляется значение тока на первом шаге интегрирования:

$$i_1 = i(0_+) + \Delta i_0 = 0 + 0.005 = 0.005 \text{ A.} \quad (19)$$

7. Зная ток первого шага интегрирования, вычисляем значения u_1 и φ_1 по формулам (8, 9):

$$u_1 = 2 \cdot 0.005^{0.7} = 0.04901 \text{ В,} \quad (20)$$

$$\varphi_1 = u_1' = 2 \cdot 0.7 \cdot 0.005^{-0.3} = 6.861784 \text{ Ом.} \quad (21)$$

8. Вычисляем теперь значение первой производной силы тока в первой точке по соотношению (14):

$$i_1' = \frac{5 - 0.049013}{0.1} = 49.50987 \text{ A/c.} \quad (22)$$

9. Знание производной тока позволяет определить приращение тока на первом шаге:

$$\Delta i_1 = i_1' \cdot h = 0.004951 \text{ A.} \quad (23)$$

10. Соотношение (15) позволяет вычислить значение производной φ_{i1}' :

$$\varphi'_{i1} = \frac{\varphi_1^2}{u_1} - \frac{\varphi_1}{i_1} = \frac{(6.861783865)^2}{0.049012741} - \frac{6.861783865}{0.005} = -411.71208 \text{ Ом/А.} \quad (24)$$

11. Вычисляем значения $\Delta\varphi_1$ и Δu_1 :

$$\Delta\varphi_1 = \varphi'_{i1} \cdot \Delta i_1 = -411.71208 \cdot 0.004950987 = -2.038381156 \text{ Ом,} \quad (25)$$

$$\Delta u_1 = \varphi_1 \cdot \Delta i_1 = 6.861783865 \cdot 0.004950987 = 0.0339726034 \text{ В.} \quad (26)$$

12. Таким образом, все ячейки первой строки таблицы 1 заполнены.

Теперь вычисляем значения переменных величин i_2, u_2, φ_2 :

$$i_2 = i_1 + \Delta i_1 = 0.005 + 0.004950987 = 0.009950987 \text{ А,} \quad (27)$$

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = 0.049012741 + 0.0339726034 = 0.08298530338 \text{ В,} \quad (28)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi_1 = 6.861783865 - 2.038381156 = 4.823402709 \text{ Ом.} \quad (29)$$

Далее, за исключением п. 7 процесс повторяется до тех пор, пока не будет найдено решение за весь период времени, с заданной степенью точности, удовлетворяющий требованиям задачи.

Из изложенного материала видно, что если использовать степенные функции для моделирования вольтамперных характеристик нелинейных резисторов [12], записанных в дифференциальной форме, то при реализации соответствующих нелинейных резисторов нет необходимости изменять ни схему, ни программу функционирования цифровой части на рис. 1. Для получения требуемых численных значений A_k, B_k достаточно задать начальные условия в соответствии с соотношениями (7).

Благодарности.

Работа выполнена при поддержке гранта Южного федерального университета России: «Теория и методы энергосберегающего управления распределенными системами генерации, транспортировки и потребления электроэнергии».

Литература

1. Пивнев В.В., Басан С.Н. Некоторые аспекты обратимости процессов в

линейных электрических цепях второго порядка // Инженерный вестник Дона, 2013, №4 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/1969/.

2. Филиппов Е. Нелинейная электротехника. М.: Энергия, 1968. 503 с.

3. Данилов Л.В. Электрические цепи с нелинейными R элементами. М.: Связь, 1974. 135 с.

4. Басан С.Н., Изотов М.В. Применение микропроцессорных устройств в задачах синтеза нелинейных электрических цепей с заданными свойствами. // Materiały VII Międzynarodowej naukowo-praktycznej konferencji «Perspektywiczne opracowania są nauką i technikami - 2011». Volume 56. Techniczne nauki. Przemysł. Nauka i studia, 2011. pp.17-24.

5. Басан С.Н., Изотов М.В. Универсальный аналого – цифровой элемент электронной техники // Труды международной научной конференции. Таганрог- Дивноморск: 2009. С. 486-489.

6. Данилов Л.В., Матханов П.Н., Филиппов Е.С. Теория нелинейных электрических цепей. Ленинград: Энергоатомиздат, 1990. 252 с.

7. Басан С.Н. Электрические цепи с нелинейными резисторами. Ростов-на-Дону: Издательство Ростовского университета, 1984. 200 с.

8. Басан С.Н., Данилов Л.В. Классы эквивалентных пассивных нелинейных цепей. В кн.: Методы математического моделирования и теория электрических цепей, вып. 2. Киев: 1973. 263 с.

9. Пивнев В.В., Басан С.Н. К вопросу о разработке модели нелинейного двухполюсника с управляемой вольт-амперной характеристикой // Инженерный вестник Дона, 2015, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3203/.

10. Pivnev V.V., Basan S.N. Some questions about equivalent circuit synthesis and nonlinear electrical circuit implementation with the specified properties in the electronic simulation tasks // Applied Mechanics and Materials Vols. 670-671. 2014. pp. 1454-1457.

11. Pivnev V.V., Basan S.N., Voloshchenko Y.P. The application of

approximation characteristics non-linear resistor implement the required current-voltage characteristics // Proceedings of the International Conference on Advances in the field of energy, environmental and chemical engineering. Part of series: Advances in Engineering Research (September 2015). – Access: doi:10.2991/aece-15.2015.2.

12. Pivnev V.V., Basan S.N. Some the application of the Taylor series for the analysis of processes in non-linear resistive circuits // Applied Mechanics and Materials Vols. 701-702. 2015. pp. 1173-1176.

References

1. Pivnev V.V., Basan S.N. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013, №4 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4y2013/1969/.

2. Filippov E. Nelineynaya elektrotehnika [Nonlinear Electrical Engineering]. M.: Energiya, 1968. 503 p.

3. Danilov L.V. Elektricheskie tsepi s nelineynymi R elementami [Electrical circuit with non-linear R-element]. M.: Svyaz', 1974. 135 p.

4. Basan S.N. Izotov MV. Materialy VII Mezhdunarodnoj nauki i tehniki nauchno-prakticheskaja konferencija «Perspektivnye issledovanija - 2011». Tom 56. Tehnicheskie nauki. Promyshlennaja nauka i issledovanija [Materials of the VII International Science and Technology Scientific and Practical Conference "Prospective Study - 2011". Tom 56. Engineering: Industry, Science and Research]. 2011, pp.17-24.

5. Basan S.N., Izotov M.V. Universal'nyy analogo – tsifrovoy element elektronnoy tekhniki. Trudy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii. Taganrog-Divnomorsk: 2009. pp. 486-489.

6. Danilov L.V., Matkhanov P.N., Filippov E.S. Teoriya nelineynykh elektricheskikh tsepey [The theory of non-linear electric circuits]. Leningrad: Energoatomizdat, 1990. 252 p.

7. Basan S.N. Elektricheskie tsepi s nelineynymi rezistorami [Electrical circuits

with nonlinear resistors]. Rostov-na-Donu: Izdatel'stvo Rostovskogo universiteta, 1984. 200 p.

8. Basan S.N., Danilov L.V. Klassy jekvivalentnyh passivnyh nelinejnyh cepej. V kn.: Metody matematicheskogo modelirovanija i teorija jelektricheskikh cepej [Classes equivalent passive nonlinear circuits. Proc.: Methods of mathematical modeling and the theory of electrical circuits], vyp. 2. Kiev: 1973. 263 p.

9. Pivnev V.V., Basan S.N. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №3 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3203/.

10. Pivnev V.V., Basan S.N. Some questions about equivalent circuit synthesis and nonlinear electrical circuit implementation with the specified properties in the electronic simulation tasks. Applied Mechanics and Materials Vols. 670-671. 2014. pp. 1454-1457.

11. Pivnev V.V., Basan S.N., Voloshchenko Y.P. The application of approximation characteristics non-linear resistor implement the required current-voltage characteristics. Proceedings of the International Conference on Advances in the field of energy, environmental and chemical engineering. Part of series: Advances in Engineering Research (September 2015). Access: doi:10.2991/aece-15.2015.2.

12. Pivnev V.V., Basan S.N. Some the application of the Taylor series for the analysis of processes in non-linear resistive circuits. Applied Mechanics and Materials Vols. 701-702. 2015. pp. 1173-1176.