Распределение напряжений вблизи подземных цилиндрических и сферических полостей, созданных взрывом

И.И. Фролова

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

Аннотация: Рассматривается задача о напряженном состоянии породного массива с непрерывной неоднородностью, полученной при создании в нём полости с помощью взрыва. Выбран случай, когда основные механические характеристики зависят только от одной координаты – радиуса, что позволило получить относительно простые способы решения задачи. Расчетная схема задачи позволяет свести её к решению одномерных задач. Для случая центрально-симметричной задачи рассматривается обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Используя замену переменных, можно перейти к решению гипергеометрического уравнения. Решения гипергеометрических уравнений даются в виде гипергеометрических рядов, которые заведомо сходятся. С помощью обратных замен находятся напряжения. Определяется напряжённое состояние породного массива при различных степенях его неоднородности. Результаты представлены в виде графиков. Проведено сравнение с аналогичными решениями для однородных массивов. Представленные результаты позволяют сделать вывод, что при решении подобных задач следует учитывать неоднородность породных массивов, полученную в процессе создания в них полостей с помощью взрыва.

Ключевые слова: неоднородность среды, породный массив, сферическая полость, напряжённое состояние.

В работе представлено решение задачи о напряженном состоянии тел с непрерывной неоднородностью, т.е. в общем случае основная механическая характеристика материала – модуль упругости является непрерывной функцией координат точек тела [1]. Выбор соответствующей зависимости определяется на основании многочисленных экспериментальных данных [2,3]. Также желательно, чтобы выбранная зависимость давала возможность получить относительно простые способы решения задач [4].

Одним из широко распространенных классов практически важных задач является случай, когда механические характеристики являются функциями только одной координаты – радиуса. Это задачи, в которых неоднородность обусловлена, например, взрывным способом получения полости в породных массивах.

Как известно, при взрывном способе образования подземных полостей окружающий такую полость породный массив претерпевает различные изменения (появление микротрещин, уплотнение, спекание), которые приводят к механической неоднородности материала массива. Одной из простейших аппроксимаций изменения модуля упругости вдоль радиуса при буро-взрывном способе создания выработки является кусочно-линейная зависимость. При этом в зоне изменения деформативности массива ($a<r<b$) модуль Юнга изменяется по линейному закону, а при $r>b$ считается постоянным, равным значению E_0 в ненарушенном массиве.

Зависимость $E(r)$ записывается в виде:

$$E(r)=\begin{cases}\dfrac{E_0-E_1}{b-a}r+\dfrac{E_1b-E_0a}{b-a}; & a\le r\le b;\\ E_0=const, & r\ge b,\end{cases} \tag{1}$$

где E_1 -значение модуля Юнга на контуре полости.

Расчётная схема задачи дана на рис.1.

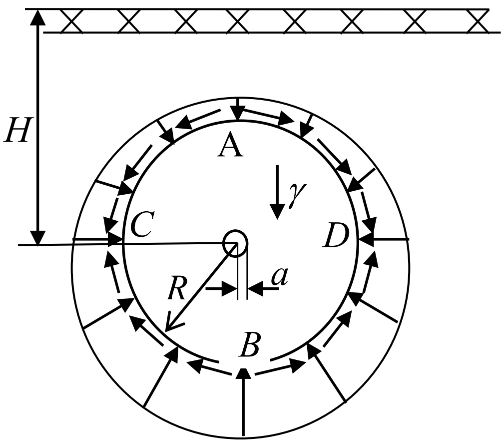

Рис. 1 - Расчётная схема породного массива

Рассматривая расчеты напряжённого состояния вблизи таких полостей, следует учитывать условия, при которых эта задача может быть сведена к решению одномерных задач [5].

Если отверстие расположено на достаточной глубине (a<<H, где a - радиус отверстия, H -глубина его заложения), то внешняя поверхность вырезаемого массива не пересекает поверхность земли и геометрически задача обладает осевой симметрией. Однако нагрузки, приложенные к поверхности полости, существенно несимметричны. Это обусловлено различным вертикальным давлением в точках A и B (рис.1), а также наличием бокового отпора, который зависит от отношения ν/(1-ν) и приводит к уменьшению горизонтального давления в точках C и D (рис.1). Таким образом, нормальная составляющая давления, действующего на поверхность радиуса R, равна в указанных точках:

$$\begin{aligned}
&т.\ A && p=\gamma(H-R);\\
&т.\ B && p=\gamma(H+R);\\
&т.т.\ C\ и\ D && p=\frac{\nu}{1-\nu}\gamma H.
\end{aligned} \tag{2}$$

Ниже приводятся некоторые результаты расчетов в задачах о концентрации напряжений вблизи полостей, созданных взрывом, полученные на основе одномерных моделей. Подобный подход к решению используется и в [6]. Коэффициент Пуассона считался постоянным. При ν=0,5 решение получается элементарным [7]. Для случая центрально-симметричной задачи [8] имеем следующее разрешающее уравнение (3), которое представляет собой обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
&\sigma_r'' + \frac{1}{r}\left(4 - r\frac{E'}{E} - \frac{\nu' r}{1-\nu}\right)G_r' - \frac{1}{r}\left(2\frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{E'}{E} + \frac{4\nu'}{1-\nu}\right) = \\
&= \frac{R}{r}\left(r\frac{E'}{E} - \frac{2-r\nu'}{1-\nu}\right) - R' - \frac{2E\varepsilon_B}{(1-\nu)r}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Это уравнение совпадает по структуре с основным разрешающим уравнением плоской задачи.

Если ввести обозначения:

$$\varphi(r)=\frac{4}{r}-\frac{E'}{E}-\frac{\nu'}{1-\nu};$$
$$\psi(r)=-\frac{2(1-2\nu)}{r(1-\nu)}\frac{E'}{E}-\frac{4\nu'}{r(1-\nu)}; \tag{4}$$
$$f(r)=R\left[\frac{E'}{E}+\frac{\nu'}{\nu}-\frac{2}{r(1-\nu)}\right]-R'-\frac{2E\varepsilon_B{}'}{r(1-\nu)}.$$

Это уравнение должно быть дополнено граничными условиями на концах интервала изменения переменной r (a и b – радиусы внутренней и внешней поверхностей толстостенного шара). Условия в перемещениях в таком случае имеют вид:

$$r=a(b),$$
$$u=r\left\{\frac{1}{E}\left[\sigma_r(1-\nu)+r(\sigma_r{}'+R)\right]\varepsilon_B\right\}\Big|_{r=a,b}. \tag{5}$$

Наиболее простым получается решение в случае для несжимаемого материала ($\nu=const=0{,}5$), когда для $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ соответственно получаются следующие выражения:

$$\varphi(r)=\frac{4}{r}-\frac{E'}{E};$$
$$\psi(r)=0. \tag{6}$$

При произвольном $\nu=\nu_0=\mathrm{const}$ разрешающее уравнение имеет вид:

$$\sigma_r''+\frac{1}{r}\left(\frac{n}{r}-\frac{E'}{E}\right)G_r'-\frac{k}{r}\frac{E'}{E}\sigma_r=0. \tag{7}$$

Для центрально-симметричной задачи:

$$n=4,\ k=2\frac{1-2\nu_0}{1-\nu_0}.$$

Как в случае цилиндрического, так и в случае сферического отверстия ход решения одинаков, поэтому здесь рассматривается лишь один случай решения – решение в сферических координатах.

Обозначая индексами 1 и 2 соответственно компоненты напряжения и перемещения в зонах $a<r<b$ и $b<r<\infty$, можно записать граничные условия:

$$\begin{aligned} &r=a, \quad s_{r1}=0; \\ &r=b, \quad s_{r1}=s_{r2}; \\ &\qquad u_1=u_2; \\ &r\to\infty;\ \sigma_{r2}=-p=-\gamma H\Delta,\ \Delta=1/2(1-\nu). \end{aligned} \tag{8}$$

Если перейти к безразмерным переменным $p=r/a$, $s=\sigma_{r1}/p$ и ввести обозначения: $A=(E_1b-E_0a)/(E_0-E_1)a;\ k_1=E_1/E_0;\ k_2=a/b$, то уравнение (3) с учётом (4) и (1) примет вид:

$$p(p+A)s''+(3p+4A)s'-2ks=0, \tag{9}$$

где $k=(1\text{-}2\nu)/(1\text{-}\nu)$.   .

Делая замену переменных $p=A(x\text{-}1)$ и $s=y(x)$, можно привести уравнение (9) к виду:

$$x(x-1)y''+(3x+1)y'-2ky=0. \tag{10}$$

Это гипергеометрическое уравнение, краткая запись которого имеет вид:

$H(\alpha, \beta, \gamma, y, x)=0$,

где $\alpha=1+\sqrt{1+2k};\quad \beta=1-\sqrt{1+2k};\quad \gamma=-1.$

Вид решения уравнения (10) зависит от области изменения x, которая после обратной замены переменных представляется следующим образом:

$$x=\frac{r}{Aa}+1.$$

Очевидно, что область изменения x можно разбить на две: $x<0$ при $A<0$, а также $x>1$ при $A>0$. Особым является случай, когда $A=0$ (что соответствует случаю, когда $k_1=k_2$).

Поскольку решение уравнения (10) может быть найдено лишь в случае, когда $0<x<1$, то необходимо сделать замены переменных, которые переводят действительные области изменения на интервал (0÷1). Если $A>0$, то необходима замена:

$$\xi = \frac{1}{x}; \quad y(x) = x^{-\alpha}\eta(\xi). \tag{11}$$

При этом уравнение (10) переходит также в гипергеометрическое:

$H(\alpha, \beta, \gamma, y, x)=0$, где $\alpha_1=\alpha$; $\beta_1 =\alpha -\gamma +1$; $\gamma_1=\alpha-\beta+1$.

В случае же $A<0$ можно использовать замену переменных: $\xi = \dfrac{x}{x-1}$; $y(x) = (x-1)^{-\alpha}\eta(x)$, а параметры получаемого уравнения будут: $\alpha_1=\alpha$; $\beta_1 =\gamma -\beta$; $\gamma_1=\gamma$.

Решения гипергеометрических уравнений даются в виде гипергеометрических рядов, которые заведомо сходятся.

Зная решение $\eta(x)$, с помощью обратных замен переменных находятся напряжения σ_{r1}.

После этого напряжения $\sigma_{\theta 1}$ можно определить из уравнения равновесия, используя при этом выражения для производных для гипергеометрических функций. Окончательно общий вид решения (для случая $k_1>k_2$) представляется следующим образом:

$$\sigma_{r1} = p\xi^{\alpha}\left[C_1F_1(\xi) + C_2\xi^{1-\gamma_1}F_2(\xi)\right];$$

$$\sigma_{\theta 1} = p\xi^{\alpha}\left\{C_1\left[(1-\alpha^{1-\xi})F_1(\xi) - \frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma_1}\frac{1-\xi}{2}\xi F_3(\xi)\right] + \right. \tag{12}$$

$$\left. +C_2\left[(1-\frac{1-\xi}{2}(1+\alpha-\gamma_1))F_2(\xi)\xi^{1-\gamma_1} - \frac{\alpha_2\beta_2}{\gamma_2}\xi^{2-\gamma_1}\frac{1-\xi}{2}F_4(\xi)\right]\right\};$$

$$\sigma_{r2} = -\frac{C_3}{r^3} + C_4;$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{C_3}{2r^3} + C_4.$$

$C_1 \div C_4$ - константы.

В этих выражениях:

$$\xi = \frac{E_1 b - E_0 a}{E_1(b-r) - E_0(a-r)}; \qquad \alpha = 1 + \sqrt{\frac{3-5\nu}{1-\nu}};$$

$$F_i(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^n_{\alpha_i+n-1} C^n_{p_i+n-1}}{C^n_{\gamma_i+n-1}} \xi^n;$$

$$\alpha_1 = \alpha; \qquad \beta_1 = 2+\alpha; \quad \gamma_1 = 2\alpha - 1;$$

$$\alpha_2 = 2-\alpha; \quad \beta_2 = 4-\alpha; \quad \gamma_2 = 3-2\alpha;$$

$$\alpha_3 = 1+\alpha; \quad \beta_3 = 3+\alpha; \quad \gamma_3 = 2\alpha;$$

$$\alpha_4 = 3-\alpha; \quad \beta_4 = 5-\alpha; \quad \gamma_4 = 2(2-\alpha).$$

Константы $C_1 \div C_4$ определяются из граничных условий (8).

Подобный вид имеют решения для случая $k_1<k_2$, а также в задаче с цилиндрической полостью. Отличия будут заключаться лишь в различном виде параметров α, β, γ. Ниже будут приведены некоторые результаты расчётов.

На рис.2 изображены эпюры напряжений σ_r и σ_θ для ν=0,5 при различных значениях модуля упругости на контуре полости для случая, когда зона неоднородности определяется отношением b/a =4.

Из этих графиков видно, что неоднородность в сильной степени влияет на напряжения σ_θ. Если в однородном материале коэффициент концентрации напряжений равен 2, то с уменьшением значения E_1 эта величина существенно падает и может быть даже меньше единицы.

Характер эпюр σ_θ также изменяется, причем максимум может смещаться от контура полости в глубь массива. Влияние неоднородности материала на напряжения σ_r не столь существенно [9], что объясняется граничными условиями, хотя падение напряжений на некотором расстоянии от контура отверстия с ростом степени неоднородности может быть существенным.

При оценке прочности массива с отверстием одной из критериальных величин является разность между главными напряжениями σ_θ - σ_r.

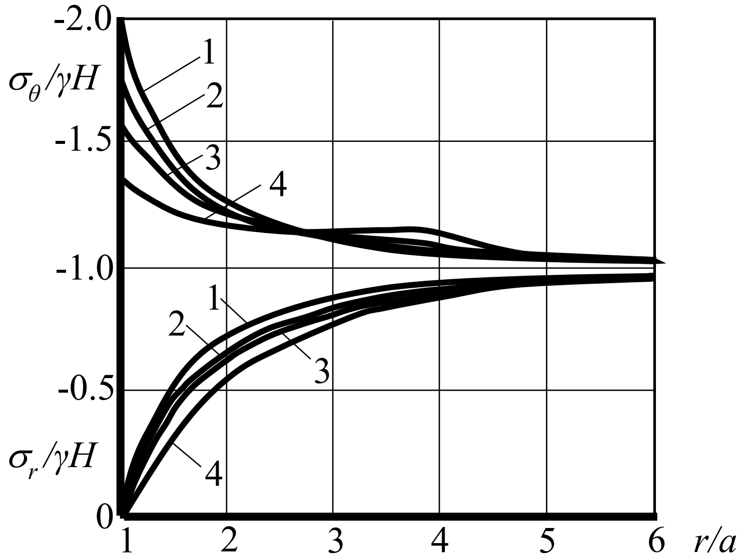

Рис. 2. Эпюры напряжений σ_r и σ_θ вблизи цилиндрической полости в неоднородном массиве (ν=0.5) при различных степенях неоднородности (E_1/E_0): 1 -1.0; 2 -0.75; 3 -0.5; 4 -0.33.

Как известно, в случае однородного материала эта разность всегда достигает максимума на контуре отверстия. В рассматриваемых задачах из-за существенного изменения характера эпюр σ_θ в некоторых случаях максимум разности σ_θ - σ_r может смещаться, что приводит к особенностям при решении вопросов оценки прочности.

Качественные результаты и выводы, полученные при рассмотрении задачи о концентрации напряжений вблизи цилиндрической полости [10,11] могут быть практически полностью перенесены на случай, когда полость имеет сферическую форму.

На рис.3 приведены зависимости коэффициента концентрации напряжений $k_\sigma = \sigma_\theta /p$ на контуре сферической полости от размеров зоны неоднородности (a/b) при различных степенях неоднородности (E_1/E_0), для случая ν =0,5.

Видно, что с увеличением зоны неоднородности (отношение a/b уменьшается) и с ростом величины E_1 кривые k_σ приближаются к значению 1.5, соответствующему классическому решению задачи для однородной среды.

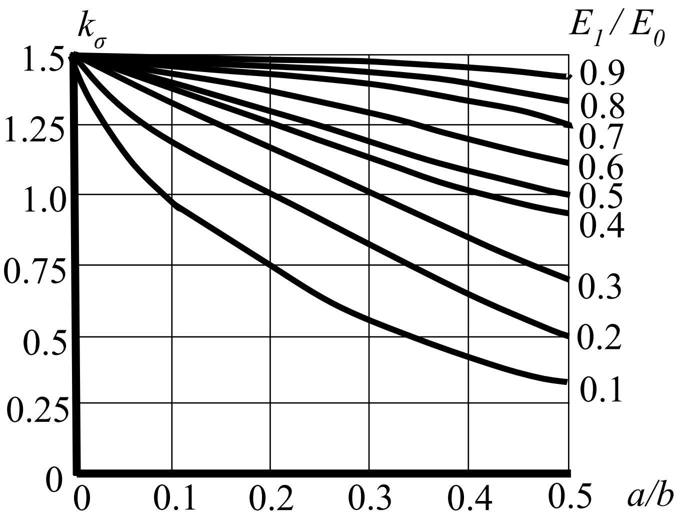

Рис. 3. Изменение коэффициента концентрации напряжений вблизи сферической полости при различных степенях (E_1/E_0) и зонах (a/b) неоднородности; ν = 0.5).

Этот факт объясняется тем, что при одном и том же значении E_1 более протяжённая зона неоднородности как бы сглаживает зависимость $E(r)$, что и приближает соответствующее решение к задаче для однородного материала. С другой стороны видно, что с уменьшением отношения E_1/E_0 коэффициент концентрации напряжений сильно падает.

Выводы.

Рассматривая расчеты полей напряжений вблизи подземных полостей, созданных с помощью взрыва, следует учитывать механическую неоднородность породных массивов, окружающих такие полости.

Из полученных результатов видно, что такая неоднородность в сильной степени влияет на напряжения σ_θ. Характер эпюр σ_θ также изменяется, причем максимум может смещаться от контура полости в глубь массива, что в расчётах на прочность будет вызывать свои особенности по сравнению с аналогичными задачами для однородных сред.

Литература

1. Дударев В.В., Дядечко В.Н. Об идентификации двумерного закона изменения плотности упругого неоднородного цилиндра. // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24. № 3. С. 381-393.

2. Фролова И.И. К вопросу идентификации неоднородных свойств грунтов и горных пород. // Системные технологии. 2022. №1. С. 67-72.

3. Vatulyan A.O. Problems of identification of inhomogeneous properties of solids. // Bulletin of the Samara state. University. 2007. Natural sciences. №4. (54). pp.93-103.

4. Андреев В.И., Булушев С.В. Оптимизация неоднородной толстостенной сферической оболочки, находящейся в температурном поле. // Вестник МГСУ. 2012. № 12. С. 40-46.

5. Frolova I.I. Deformation process modeling of the rock mass with spherical cavity created by explosion. // E3S Web of Conf. 281, 01037 (2021), URL: doi.org/10.1051/e3sconf/202128101037.

6. Мовчан А.А., Шарунов А.В. Эффект перераспределения напряжений в толстостенной сфере из сплава с памятью формы при прямом фазовом превращении под действием постоянного давления. // Прикладная математика и механика. 2024. т. 88. №2. С. 228-244.

7. Гатиев М.Ш. и др. Расчёт остаточных напряжений в полом цилиндре под действием внутреннего давления. // Вестник Евразийской науки. 2023. т.15. №1. С. 82-90.

8. Литвинов С.В., Трауш Л.И. Моделирование термоползучести неоднородного толстостенного цилиндра в осесимметричной постановке. //

Инженерный вестник Дона, 2016, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3560.

9. Гатиев М.Ш. К вопросу о ползучести полых цилиндров под действием нормального давления. // Системные технологии. 2023. №1 (№46). С. 51-57.

10. Литвинов С.В., Козельский Ю.Ф., Языев Б. М. Расчёт цилиндрических тел при воздействии теплового и радиационного нагружений // Инженерный вестник Дона, 2012, № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/954.

11. Litvinov S.V., Yazyev B.M. Determination of temperature fields and stresses during the construction of a massive monolithic foundation slab of a wind turbine tower. E3S Web of Conf. 402, 12002 (2023), URL: doi.org/10.1051/e3sconf/202340212002.

References

1. Dudarev V.V., Dyadechko V.N. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika. 2024. vol. 24. №3. pp. 381-393.

2. Frolova I.I. Sistemnyye tekhnologii. 2022. №1. pp. 67-72.

3. Vatulyan A.O. Bulletin of the Samara state. University. 2007. Natural sciences. № 4. (54). pp.93-103.

4. Andreyev V.I., Bulushev S.V. Vestnik MGSU. 2012. № 12. pp. 40-46.

5. Frolova I.I. E3S Web of Conf. 281, 01037 (2021), URL: doi.org/10.1051/e3sconf/202128101037

6. Movchan A.A., Sharunov A.V. Prikladnaya matematika i mekhanika. 2024. vol. 88. № 2. pp. 228-244.

7. Gatiyev M.SH. Vestnik Yevraziyskoy nauki. 2023. vol. 15. №1. pp.82-90.

8. Litvinov S.V., Traush L.I. Inzhenernyj vestnik Dona, 2016, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3560.

9. Gatiyev M.SH. Sistemnyye tekhnologii. 2023. №1 (№46). pp. 51-57.

10. Litvinov S. V., Kozelskiy YU. F., Yazyev B. M. Inzhenernyj vestnik Dona, 2012, № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/954.

11. Litvinov S.V., Yazyev B.M. E3S Web of Conf. 402, 12002 (2023), URL: doi.org/10.1051/e3sconf/202340212002.

Дата поступления: 28.02.2025

Дата публикации: 25.04 2025