

## Управление ограниченно неопределенными нелинейными объектами

*В.С. Елсуков, В.И. Лачин, С.М. Липкин*

*Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ)  
имени М.И. Платова, г. Новочеркасск*

**Аннотация:** Предложен алгоритм синтеза законов управления ограниченно неопределенными нелинейными объектами  $n$ -го порядка с математической моделью в нормальной форме и произвольным относительным порядком. Причем объекты управления могут обладать неустойчивым состоянием равновесия, а их матрица выхода может содержать правые собственные значения. Предложенный алгоритм синтеза основан на применении комбинированного принципа управления по производной  $n$ -й переменной состояния объекта управления. При этом ее требуемый закон изменения определяется из желаемого уравнения движения соответствующей системы автоматического управления с помощью оценок переменных состояния ее объекта.

**Ключевые слова:** объект управления, неопределенность, нелинейность, закон управления, синтез.

### ВВЕДЕНИЕ

Для управления линейными стационарными неминимально-фазовыми объектами в работах [1, 2] приведены алгебраические методы синтеза систем автоматического управления. В [3] предложен алгоритм робастного управления линейным неминимально-фазовым объектом с неопределенными в ограниченном диапазоне параметрами. Причем вектор состояния объекта управления должен быть доступен измерению. В работах [4-6] рассмотрены задачи адаптивного управления неминимально-фазовыми линейными и нелинейными объектами. Однако существующие методы адаптивного и робастного управления достаточно сложны как при синтезе алгоритмов управления указанными объектами, так и при их технической реализации [7-10].

В работе [11] предложен алгоритм аналитического синтеза систем управления для ограниченно неопределенных нелинейных объектов с произвольным относительным порядком, но с левыми собственными значениями матрицы выхода. А в работе [12] – для аналогичных объектов, но уже с правыми собственными значениями матрицы выхода.

В настоящей статье предлагается достаточно простой алгоритм синтеза законов управления для ограниченно неопределенных нелинейных объектов

---

с правыми собственными значениями матрицы выхода и неустойчивым состоянием равновесия.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются объекты управления (ОУ), которые описываются дифференциальными уравнениями в нормальной форме:

$$\dot{x}_i = \begin{cases} x_{i+1} & \text{при } i = \overline{1, n-1}; \\ bu - \varphi(\mathbf{x}) & \text{при } i = n; \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varphi(\mathbf{x})$  – ограниченно неопределенная нелинейная функция, причем скорость ее изменения тоже ограничена, т.е.

$$|\varphi(\mathbf{x})| \leq \varphi_0; \quad \left| \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \right| \leq \gamma; \quad (2)$$

$\mathbf{x}$  – вектор состояния,  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ ;  $u$  – управляющее воздействие;  $y$  – выходная величина;  $\mathbf{C}$  – матрица выхода,  $\mathbf{C} = [1, c_1, \dots, c_l]$ , причем  $n > l \geq 1$  и некоторые коэффициенты матрицы  $\mathbf{C}$  могут быть меньше нуля;  $b$  – постоянный коэффициент.

Необходимо найти такой закон управления  $u = u(y, g)$ , чтобы движение соответствующей системы автоматического управления (САУ) с объектом (1) удовлетворяло желаемому уравнению

$$\left( 1 + \sum_{i=1}^n \tau_i p^i \right) y = \left( 1 + \sum_{i=1}^l c_i p^i \right) g,$$

которое эквивалентно следующему

$$\left( 1 + \sum_{i=1}^n \tau_i p^i \right) x_1 = g, \quad (3)$$

где  $g$  – сигнал задания,  $g = const$ ;  $\tau_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – постоянные коэффициенты, которые подлежат определению из условий [12-13]:

$$I = \int_0^{\infty} [x_1(0) - x_1(t)] dt \rightarrow \min, \quad x_1(0) > 0; \quad (4)$$

$$|A(p)|_{p=j\omega} \geq 1, \quad (5)$$

где  $A(p)$  – характеристический полином синтезируемой линеаризованной системы.

### АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Заметим, что желаемое уравнение движения САУ (3) определяет требуемый закон изменения производной  $n$ -й переменной состояния:

$$\dot{x}_{nT} = x_{1T}^{(n)} = \frac{1}{\tau_n} \left\{ g - \left( 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i p^i \right) x_1 \right\}, \quad (6)$$

Если подставить выражение для производной  $\dot{x}_{nT}$  в уравнение ОУ (1) и учесть ограничения (2), то можно сформировать искомый закон управления:

$$u = b^{-1} (\dot{x}_{nT} + u_k), \quad (7)$$

где  $u_k$  – компенсирующая составляющая управления, которая служит для компенсации функции  $\varphi(\mathbf{x})$  и которую можно сформировать с помощью дифференциальной компенсирующей связи

$$u_k = \frac{1}{(1 + \mu p)^n} \dot{x}_{nT} - \hat{\dot{x}}_n, \quad (8)$$

где  $\hat{\dot{x}}_n$  – оценка производной  $n$ -й переменной состояния;  $\mu$  – «малая» постоянная времени инерционного фильтра, который необходим для согласования по фазе сравниваемых сигналов.

Дифференциальная компенсирующая связь с сигналом (8) преобразует ОУ так, что он становится эквивалентным последовательному соединению  $n$  интеграторов и форсирующего звена с передаточной функцией  $C(p) = 1 + \sum_{i=1}^l c_i p^i$ . Для синтеза САУ с таким ОУ можно предложить следующий алгоритм.

1. Полагая, что ОУ уже преобразован подключением к нему дифференциальной компенсирующей связи, записать уравнение наблюдателя его переменных состояния

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{K}(y - \mathbf{C}\hat{x}) + \mathbf{B}u, \quad (9)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица преобразованного ОУ;  $\mathbf{B} = [0, 0, \dots, b]^T$ ;  $\mathbf{K}$  – искомая матрица постоянных коэффициентов.

2. Определить компоненты матрицы  $\mathbf{K}$  по желаемому расположению корней характеристического полинома наблюдателя  $\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C})$ , приравняв его, например, полиному биномиальной формы  $(1 + \mu^{-1}p)^n$ .

3. На основании выражения (6) для производной  $\dot{x}_{nT}$  и полученных с помощью наблюдателя оценок переменных состояния сформировать требуемый закон изменения производной  $n$ -й переменной состояния:

$$\dot{x}_{nT} = \frac{1}{\tau_n} \left\{ g - \hat{x}_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i \hat{x}_{i+1} \right\}. \quad (10)$$

4. Найти оценку производной  $n$ -й переменной состояния с помощью инерционно-дифференцирующего фильтра, который подключается к выходу объекта управления и соответствующим выходам наблюдателя переменных состояния:

$$\hat{x}_n = \frac{1}{c_l (1 + \mu p)^n} \left( p^{n-l} y - \sum_{i=1}^{l-1} c_{l-i} \hat{x}_{n-i+1} - \hat{x}_{n-l+1} \right). \quad (11)$$

5. На основании уравнений (1), (7)-(11) найти характеристический полином синтезированной, алгоритмически линеаризованной системы

$$A(p) = (1 + 2n\mu p) \tau_n p^n + \sum_{i=1}^{n-1} \tau_i p^i + 1. \quad (12)$$

6. С помощью полинома (12) и дополнительных условий (4) и (5) найти значения неизвестных до сих пор параметров [11-13]:

$$\tau_1 = 2^{n+1} n\mu; \tau_{j+1} = \begin{cases} \tau_1^2/2 & \text{при } j = 1; \\ \tau_j^2 / 2\tau_{j-1} & \text{при } j = 2, n-1. \end{cases}$$

### ПРИМЕР СИНТЕЗА

Рассмотрим синтез закона управления для нелинейного объекта с неустойчивым состоянием равновесия и правым собственным значением матрицы выхода, математическая модель которого имеет вид:

$$\dot{x}_i = \begin{cases} x_{i+1} & \text{при } i = 1; \\ u - x_1 + x_2^2 & \text{при } i = 2; \end{cases} \quad (13)$$
$$y = x_1 - 0,2x_2.$$

Необходимо найти такой закон управления  $u = u(y, g)$ , чтобы движение соответствующей САУ с объектом (13) и сигналом задания удовлетворяло желаемому уравнению:

$$(1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2) y = (1 - 0,2 p) g$$

или, что то же,

$$(1 + \tau_1 p + \tau_2 p^2) x_1 = g, \quad (14)$$

где  $g$  – сигнал задания,  $g = const$ ; коэффициенты  $\tau_1$  и  $\tau_2$  подлежат определению из условий (4) и (5).

Согласно предложенному алгоритму на основании уравнения (14) формируем требуемый закон изменения производной второй переменной состояния

$$\dot{x}_{2T} = \ddot{x}_{1T} = \frac{1}{\tau_2} \{g - (1 + \tau_1 p)x_1\}, \quad (15)$$

искомый закон управления в общем виде

$$u = \dot{x}_{2T} + u_k, \quad (16)$$

и компенсирующую составляющую управления

$$u_k = \frac{1}{(1 + \mu p)^2} \dot{x}_{2T} - \hat{x}_2, \quad (17)$$

где  $\hat{x}_2$  – оценка производной второй переменной состояния, причем постоянную времени инерционного фильтра полагаем  $\mu=0,01$ .

Считая, что сигналы внутренних обратных связей объекта (13) компенсируются соответствующей составляющей закона управления, записываем для преобразованного объекта уравнение наблюдателя его переменных состояния

$$\hat{\dot{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} (y - [1 \quad -0,2] \hat{\mathbf{x}}) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{x}_{2T} \quad (18)$$

и его характеристический полином полагаем равным желаемому полиному:

$$\det \left( s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} [1 \quad -0,2] \right) = s^2 + 200s + 10000.$$

Приравнивая в полученном уравнении коэффициенты при одинаковых степенях оператора  $s$  справа и слева от знака равенства, определяем значения коэффициентов наблюдателя:  $k_1=2200$ ,  $k_2=10000$ .

Оценку производной второй переменной состояния находим с помощью инерционно-дифференцирующего фильтра, который подключается входами к выходам объекта управления и наблюдателя переменных состояния:

$$\hat{\dot{x}}_2 = \frac{-5}{(1 + \mu p)^2} \{ p y - \hat{x}_2 \}. \quad (19)$$

С помощью выражения (15) и оценок переменных состояния ОУ формируем требуемый закон изменения производной второй переменной состояния:

$$\dot{x}_{2T} = \frac{1}{\tau_2} \{ g - \hat{x}_1 - \tau_1 \hat{x}_2 \}. \quad (20)$$

На основании уравнений (13), (16)-(20) можно составить структурную схему синтезированной САУ и по ней найти ее характеристический полином

$$A(p) = (1 + 4\mu p) \tau_2 p^2 + \tau_1 p + 1.$$

Из условий (4) и (5) с помощью полинома  $A(p)$  определяем неизвестные до сих пор параметры:  $\tau_1=0,2$  и  $\tau_2=0,01$ .

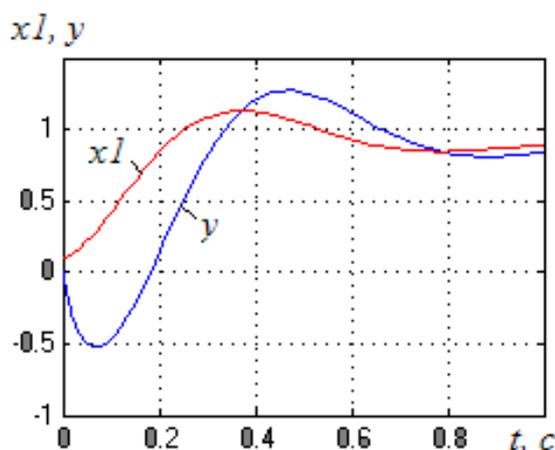


Рис. 1. – Переходные процессы

Методом моделирования синтезированной САУ на ПК с помощью пакета *Simulink* получены переходные процессы по переменной состояния  $x_1(t)$  и выходной величине  $y(t)$  (рис. 1) при отработке системой ступенчатого сигнала задания с начальными условиями:  $x_1(0)=0,1$  и  $x_2(0)=0,5$ . Результаты моделирования свидетельствуют о том, что синтезированная предложенным методом САУ для объекта (13) имеет требуемые показатели качества переходных процессов.

## ВЫВОДЫ

- Предложен алгоритм управления ограниченно неопределенными нелинейными объектами  $n$ -го порядка с неустойчивым состоянием равновесия и правыми собственными значениями матрицы выхода, отличающийся тем, что основан на применении комбинированного принципа управления по производной  $n$ -й переменной состояния.

Рассмотрен пример синтеза системы автоматического управления для объекта второго порядка указанного класса, результаты компьютерного моделирования которой свидетельствуют о том, что она обеспечивает требуемые показатели качества переходных процессов.

### Литература

1. Ким Д.П. Синтез неминимально-фазовых систем управления с заданным временем регулирования // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 4. С. 5-10.
2. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 360 с.
3. Гребенщиков Д.Е., Паршева А.И., Цыкунов А.М. Алгоритм робастного управления для одного класса неминимально-фазовых объектов // Вестник АГТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1. С. 89-94.
4. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб.: Наука, 1999. 467 с.
5. Фуртат И.Б. Адаптивное управление неминимально-фазовыми объектами определенного класса // Проблемы управления. 2013. № 1. С.19-25.
6. Фуртат И.Б. Адаптивное управление неминимально-фазовыми нелинейными объектами // Изв. вузов. Приборостроение. 2013. № 3. С. 30- 37.
7. Целигоров Н.А., Мафура Г.М., Целигорова Е.Н. Математические модели неопределенностей систем управления и методы, используемые для их исследования // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 URL: [ivdon.ru/magazine/archive/n4y2012/1277/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n4y2012/1277/).
8. Андрашитов Д.С., Костоглотов А.А., Костоглотов А.И., Лазаренко С.В., Ценных Б.М. Универсальный метод синтеза оптимальных управлений

нелинейными Лагранжевыми динамическими системами // Инженерный вестник Дона, 2014, №1 URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2014/2251/.

9. Atassi A.N., Khalil H.K. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Tras. Automat. Control. 1999. Vol. 44, N 9. pp. 1672-1687.

10. Keller H. Vereinfacht Ljapunov – Synthese fur nichtlineare system // Automatisierung. 1990. N 3. pp. 11-113.

11. Елсуков В.С., Лачин В.И., Липкин С.М. Синтез систем управления для ограниченно неопределенных нелинейных объектов с произвольным относительным порядком по выходу // Изв. вузов. Электромеханика. 2014. № 1. С. 88-90.

12. Елсуков В.С., Лачин В.И., Липкин С.М. Синтез систем управления для ограниченно неопределенных нелинейных объектов с правыми собственными значениями матрицы выхода // Изв. вузов. Электромеханика. 2015. № 5. С. 70-75.

13. Елсуков В.С., Лачин В.И., Демидов О.Ю. Синтез систем управления по выходу неминимально-фазовых нелинейных объектов с неустойчивым состоянием равновесия // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Техн. науки. 2017. № 1. С. 8-12.

### References

1. Kim D.P. Mehatronika, avtomatizatsija, upravlenie. 2010. № 4. pp. 5-10.
2. Gayduk A.R. Teorija i metody analiticheskogo sinteza system avtomaticheskogo upravlenija [Theory and techniques for feedback systems analytical synthesis]. M.: FIZMATLIT, 2012. 360 p.
3. Grebenshikov D.E., Parscheva A.I., Zykunov A.M. Vestnik AGTU. Serija: Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika. 2010. № 1. pp. 89-94.



4. Andrievskiy B.R., Fradkov A.L. Izbrannye glavy teorii avtomaticheskogo upravlenija s primerami na jazyke MATLAB [Control theory elements with MATLAB samples]. SPb.: Nauka, 1999. 467 p.
5. Furtat I.B. Problemy upravlenija. 2013. № 1. pp. 19-25.
6. Furtat I.B. Izv. vuzov. Priborostroenie. 2013. № 3. pp. 30-37.
7. Zeligorov N.A., Mafura G.M., Zeligorova E.N. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2009, №1. URL: [idon.ru/magazine/archive/n4y2012/1277/](http://idon.ru/magazine/archive/n4y2012/1277/).
8. Andrashitov D.S., Kostoglotov A.A., Kostoglotov A.I., Zennykh B.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2014, №1. URL: [idon.ru/magazine/archive/n1y2014/2251/](http://idon.ru/magazine/archive/n1y2014/2251/).
9. Atassi A.N., Khalil H.K. IEEE Tras. Automat. Control. 1999. Vol. 44, № 9. pp. 1672-1687.
10. Keller H. Automatisierung. 1990. № 3. pp. 11-113.
11. Elsukov V.S., Lachin V.I., Lipkin S.M. Izv. vuzov. Elektromehanika. 2014. № 1. pp. 88-90.
12. Elsukov V.S., Lachin V.I., Lipkin S.M. Izv. vuzov. Elektromehanika. 2015. № 5. pp. 70-75.
13. Elsukov V.S., Lachin V.I., Demidov O.Yu. Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Tehn. nauki. 2017. № 1. pp. 8-12.