

Вывод соотношений сопряжения при расчете блока составной конструкции из шестиугольной пластины и круговой цилиндрической оболочки

И.А.Краснобаев, И.А.Маяцкая, Икуру Годфрей Аарон

В большинстве конструкций применяются сложные составные детали. Стремление получить конструкцию наиболее легкой и, вместе с тем, максимально прочной и жесткой, приводит к появлению сложных по форме составных конструкций, которые содержат несущие элементы в виде оболочек, пластин, а также стержней. Такую конструкцию с полным правом нельзя отнести ни к пластинам, ни к оболочкам. Поэтому для определения напряженно-деформированного состояния сложной составной конструкции необходимо разрабатывать свой собственный метод. Ниже приведена попытка разработки общего подхода к расчету конструкции, состоящей из конечного числа пластин, оболочек и стержней.

В качестве примера реализации разработанного подхода рассмотрен расчет напряженно-деформированного состояния составной конструкции, состоящей из некоторого числа идентичных блоков, скрепленных друг с другом. До настоящего времени решение такой задачи в общем виде отсутствует [1]–[10]. В основе метода положен вариационно-энергетический принцип.

Рассмотрим расчет составных конструкций, состоящих из следующих элементов: пластина и оболочка [1]–[10]. Толщины, как пластинки, так и цилиндрической оболочки достаточно малы, поэтому к ним при построении теории применима гипотеза Кирхгоффа-Лява, Материал блока принят упругим, однородным, изотропным. Внешняя нагрузка считается приложенной в вершинах шестиугольных пластин оснований.

Пусть блок состоит из шестиугольной пластины (тело I) и цилиндрической оболочки (тело II). Поскольку тело I жестко скреплено с телом II, то имеет место равенство перемещений на линии соприкосновения обеих тел друг с другом.

Рассмотрим шестиугольную пластину (тело I). Пусть произвольная точка A принадлежит как телу I, так и телу II (рис. 1).

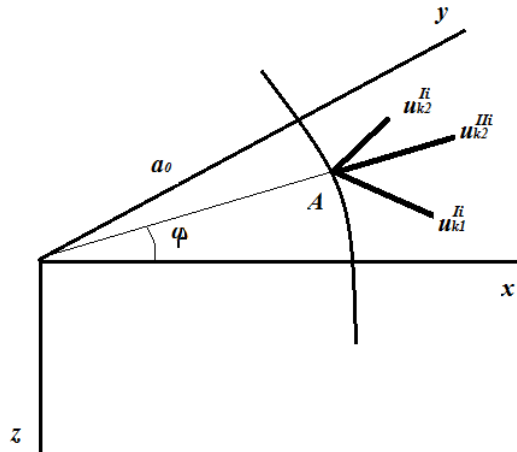


Рис. 1. – Схема для определения перемещений в точке A для тел I и II

Координаты точки A до деформации можно записать

$$x = a_0 \cos \varphi; \quad y = a_0 \sin \varphi; \quad z = 0. \quad (1)$$

В результате деформации блока точка A перейдет в точку A_1 .

Координаты точки A_1 после деформации равны

$$\begin{aligned} X &= a_0 \cos \varphi + u_{k1}^{Ii}(x, y); \\ Y &= a_0 \sin \varphi + u_{k2}^{Ii}(x, y); \\ Z &= u_{k3}^{Ii}(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая условие (1), получим

$$\begin{aligned} X &= x + u_{k1}^{Ii}(x, y); \\ Y &= y + u_{k2}^{Ii}(x, y); \\ Z &= u_{k3}^{Ii}(x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

Так как точки A и A_1 принадлежат телу II, их координаты можно записать в цилиндрической системе координат. До деформации точка A имела координаты $a_0, \varphi, z=0$. После деформации точка A_1 будет иметь следующие координаты:

$$\begin{aligned}
X &= a_0 \cos \varphi + u_{\kappa 2}^{IIi}(x, y) \cos \varphi - u_{\kappa 1}^{IIi}(x, y) \sin \varphi ; \\
Y &= a_0 \sin \varphi + u_{\kappa 2}^{IIi}(x, y) \sin \varphi + u_{\kappa 1}^{IIi}(x, y) \cos \varphi ; \\
Z &= u_{\kappa 3}^{IIi}(x, y) .
\end{aligned} \tag{4}$$

Используя (2) и (3), получим первую группу сопряжений по перемещениям:

$$\begin{aligned}
u_{\kappa 1}^{Ii} &= u_{\kappa 2}^{IIi}(x, y) \cos \varphi - u_{\kappa 1}^{IIi}(x, y) \sin \varphi ; \\
u_{\kappa 2}^{Ii} &= u_{\kappa 2}^{IIi}(x, y) \sin \varphi + u_{\kappa 1}^{IIi}(x, y) \cos \varphi ; \\
u_{\kappa 3}^{Ii} &= u_{\kappa 3}^{IIi}(x, y) .
\end{aligned} \tag{5}$$

Равенство углов поворота, имеющее место при жестком скреплении тел блока, дает вторую группу условий сопряжения.

Обозначим направляющие косинусы нормали к деформированной поверхности тела I через $\bar{N} = (l_1, l_2, l_3)$. По формулам дифференциальной геометрии определяем координаты нормали:

$$\begin{aligned}
l_1 &= u_{\kappa 2, x}^{Ii} u_{\kappa 3, y}^{Ii} - \left(1 + u_{\kappa 2, y}^{Ii}\right) u_{\kappa 3, x}^{Ii} ; \\
l_2 &= u_{\kappa 3, x}^{Ii} u_{\kappa 1, y}^{Ii} - \left(1 + u_{\kappa 1, x}^{Ii}\right) u_{\kappa 3, y}^{Ii} ; \\
l_3 &= \left(1 + u_{\kappa 1, x}^{Ii}\right) \left(1 + u_{\kappa 2, y}^{Ii}\right) - u_{\kappa 1, y}^{Ii} u_{\kappa 2, x}^{Ii} .
\end{aligned} \tag{6}$$

Проведем аналогичные рассуждения для тела II. Найдем деформированную образующую тела II. Для этого возьмем две произвольные, близкие друг к другу точки A и B на образующей тела II (рис. 2).

До деформации точки имеют следующие координаты $A = (x, y, 0)$ и $B = (x, y, ds)$. После деформации эти точки перейдут в точки A_1 и B_1 . С учетом (1) и (4), получим:

$$\begin{aligned}
\text{координаты точки } A_1 - \quad X &= x + u_{\kappa 2}^{IIi} \cos \varphi - u_{\kappa 1}^{IIi} \sin \varphi ; \\
Y &= y + u_{\kappa 2}^{IIi} \sin \varphi + u_{\kappa 1}^{IIi} \cos \varphi ; \quad Z = u_{\kappa 3}^{IIi} .
\end{aligned} \tag{7}$$

координаты точки B_1 –
$$X = x + u_{\kappa 2}^{III} \cos \varphi - u_{\kappa 1}^{III} \sin \varphi + \frac{\partial \left(u_{\kappa 2}^{III} \cos \varphi - u_{\kappa 1}^{III} \sin \varphi \right)}{\partial z} ds$$

;

$$Y = y + u_{\kappa 2}^{III} \sin \varphi + u_{\kappa 1}^{III} \cos \varphi + \frac{\partial \left(u_{\kappa 2}^{III} \sin \varphi + u_{\kappa 1}^{III} \cos \varphi \right)}{\partial z} ds ;$$

$$dS = ds + u_{\kappa 3}^{III} + u_{\kappa 3, z}^{III} ds . \quad (8)$$

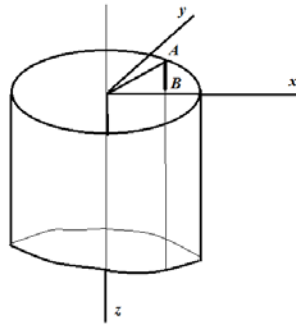


Рис. 2. – Схема для определения перемещений на образующей тела II

Тогда для тела II имеем:
$$l_1 = \frac{\partial \left(u_{\kappa 2}^{III} \cos \varphi - u_{\kappa 1}^{III} \sin \varphi \right)}{\partial z} ds ;$$

$$l_2 = \frac{\partial \left(u_{\kappa 2}^{III} \sin \varphi + u_{\kappa 1}^{III} \cos \varphi \right)}{\partial z} ds ; \quad l_3 = 1 + \frac{\partial u_{\kappa 3}^{III}}{\partial z} . \quad (9)$$

Отбрасывая малые второго порядка по сравнению с первыми, из условий (6) и (9) получим

$$\cos \varphi \frac{\partial u_{\kappa 2}^{III}}{\partial z} - \sin \varphi \frac{\partial u_{\kappa 1}^{III}}{\partial z} = - \frac{\partial u_{\kappa 3}^{III}}{\partial x} ;$$

$$\sin \varphi \frac{\partial u_{\kappa 2}^{III}}{\partial z} + \cos \varphi \frac{\partial u_{\kappa 1}^{III}}{\partial z} = - \frac{\partial u_{\kappa 3}^{III}}{\partial y} ;$$

$$\frac{\partial u_{\kappa 3}^{III}}{\partial z} = \frac{\partial u_{\kappa 1}^{III}}{\partial x} + \frac{\partial u_{\kappa 2}^{III}}{\partial y} . \quad (10)$$

Наличие соотношений (1), (5) и (10) накладывает определенные ограничения на перемещения в составной конструкции, состоящий из шестиугольной пластины (тело I) и цилиндрической оболочки (тело II).

Литература:

1. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А. Основы расчета на изгиб тонких жестких пластин [Текст]: Монография / Краснобаев И.А., Маяцкая И.А. – Ростов н/Д, РГСУ, 2011.– 87 с.
2. Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Смирнов И.И., Языев Б.М. Теория пластин и оболочек: [Текст]: Монография / Краснобаев И.А., Маяцкая И.А., Смирнов И.И., Языев Б.М. – Ростов н/Д, РГСУ, 2011.– 114 с.
3. Амосов А.А. Техническая теория тонких упругих оболочек: [Текст]: Монография / Амосов А.А.–М.:АСВ, 2009, – 332 с.
4. Филин А.П. Элементы теории оболочек.–Л.:Стройиздат, 1975, – 256 с.
5. Огибалов П.М., Колтунов М.Л. Оболочки и пластины.–М.:МГУ, 1969, – 696 с.
6. Calladine C.R. Theory of shell structures.– N.Y.: Cambridge University Press, 1989, –788 p.
7. Zingoni A. Shell structures in civil and mechanical engineering.– N.Y.: Thomas Telford Publishing, 1997, –351 p.
8. Литвинов В.В., Кулинич И.И. Соотношения между компонентами поверхностной нагрузки в оболочках вращения при безмоментном их состоянии.[Текст] //Интернет-журнал «Инженерный вестник Дона». 2012 №4 (2) [Электронный ресурс].-М. 2012. – Режим доступа: <http://www.ivdon.ru>.
9. Стрельников Г.П., Бурцева С.В., Авилкин В.И. К расчету оболочек вариационно-энергетическим методом.[Текст] //Интернет-журнал «Инженерный вестник Дона». 2012 №4 (2) [Электронный ресурс].-М. 2012. – Режим доступа: <http://www.ivdon.ru>.
10. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки.– М.:Наука, 1966, – 636 с.