**Расчёт на прочность армированных балок с заполнителем из бимодульного материала с использованием различных теорий прочности**

**Е. Э. Кадомцева, А.Н.Бескопыльный**

Рассматривается произвольно опёртая, произвольно нагруженная балка, армированная стержнями параллельно оси балки. Заполнитель изготовлен из бимодульного материала, т.е. модули упругости на растяжение и сжатие различны, но материал является изотропным. Доказано [1], что для таких материалов верны гипотезы и формулы сопротивления материалов и теории упругости.

 В [2] были получены формулы нормальных напряжений, возникающих в заполнителе:

$σ\_{б-}$= $\frac{M\_{б}∙E\_{б-}∙z}{E\_{б+} ∙I\_{б+ }+ E\_{б-} ∙I\_{б-}}$ = $\frac{M\_{y}∙E\_{б-}∙z}{E\_{б+} ∙I\_{б+ }+E\_{б-} ∙I\_{б-}+n∙E\_{a} ∙I\_{a}}$, (1)

$σ\_{б+}$= $\frac{M\_{б}∙E\_{б+}∙z}{E\_{б+} ∙I\_{б+ }+ E\_{б-} ∙I\_{б-}}$ = $\frac{M\_{y}∙E\_{б+}∙z}{E\_{б+} ∙I\_{б+ }+E\_{б-} ∙I\_{б-}+n∙E\_{a} ∙I\_{a}}$, (2)

Где z – расстояние от нейтральной линии 0y до точки, в которой определяется нормальное напряжение,

$M\_{y}$ - изгибающий момент относительно нейтральной линии в произвольном поперечном сечении балки,

n – число стержней арматуры,

$I\_{a}$- осевой момент инерции поперечного сечения одного стержня арматуры,

$M\_{a}$- изгибающий момент, возникающий в одном стержне арматуры,

$E\_{a}$ - модуль упругости при растяжении стержней арматуры,

$M\_{б}$ - изгибающий момент, возникающий в бетонной части балки,

$M\_{б+}$- изгибающий момент, возникающий в растягивающей части бетона,

$E\_{б+}$ - модуль упругости бетона (заполнителя) при растяжении,

$I\_{б+}$ - осевой момент инерции растягивающей части бетона,

$M\_{б-}$- изгибающий момент, возникающий в сжимающей части бетона,

$E\_{б-}$- модуль упругости бетона (заполнителя) при сжатии,

$I\_{б-}$- осевой момент инерции сжимающей части бетона.

 Используя (1), (2) найдём выражение касательных напряжений, возникающих в растянутой и сжатой зоне заполнителя:

$τ\_{\pm }=\frac{E\_{б\pm }}{E\_{б+} ∙I\_{б+}+E\_{б-} ∙I\_{б-}+n∙E\_{a} ∙I\_{a}} Q∙\frac{S\_{y\pm }^{отс.}}{b\_{\pm }^{отс.}}$ , (3)

где $Q-$ поперечная сила в сечении, в котором определяется $τ\_{\pm , }S\_{y\pm }^{отс.} $ –$ статический момент части сечения, отсекаемой линией, проходящей$

$ через точку , в которой определяется τ\_{\pm }$ растянутой и сжатой зоны.

Главные напряжения, возникающие в произвольной точке заполнителя в растянутой и сжатой зоне, имеют следующий вид [3]-[6]:

$σ\_{1,2\pm }=\frac{D}{2}\left(M\_{y}∙z\pm \sqrt{M\_{y}^{2}∙z^{2}+4\left(Q∙\frac{S\_{y\pm }^{отс.}}{b\_{\pm }^{отс.}}\right)^{2}}\right)$ , (4)

где D $=\frac{E\_{б\pm }}{E\_{б+} ∙I\_{б+}+E\_{б-} ∙I\_{б-}+n∙E\_{a} ∙I\_{a}}$.

Точка, в которой главные напряжения достигают экстремальных значений в произвольном сечении, определяется из условия $\frac{ dσ\_{1,2\pm }}{dz}$ = 0 или

$M\_{y}∙\sqrt{M\_{y}^{2}∙z^{2}+4\left(Q∙\frac{S\_{y\pm }^{отс.}}{b\_{\pm }^{отс.}}\right)^{2}}\pm \left[M\_{y}^{2}∙z+2Q^{2}∙\frac{\frac{dS\_{y\pm }^{отс.}}{dz}∙b\_{\pm }^{отс.}-S\_{y\pm }^{отс.}∙\frac{db\_{\pm }^{отс.}}{dz}}{b\_{\pm }^{отс.}^{2}}\right]$=0

 Упростив, получим это выражение в следующем виде:

$M\_{y}^{2}∙(S\_{y\pm }^{отс.})^{2}∙(b\_{\pm }^{отс.})^{4}- 2∙M\_{y}^{2}∙z∙\left(\frac{dS\_{y\pm }^{отс.}}{dz}∙b\_{\pm }^{отс.}-S\_{y\pm }^{отс.}∙\frac{db\_{\pm }^{отс.}}{dz}\right)∙S\_{y\pm }^{отс.}(b\_{\pm }^{отс.})^{3}-4∙Q^{2}∙\left(\frac{dS\_{y\pm }^{отс.}}{dz}∙b\_{\pm }^{отс.}-S\_{y\pm }^{отс.}∙\frac{db\_{\pm }^{отс.}}{dz}\right)∙(S\_{y\pm }^{отс.})^{2}=0.$ (5)

Проводится расчёт на прочность армированных балок с заполнителем из бимодульного материала с использованием теорий прочности [7]-[8]. Ниже даны формулы расчётных напряжений и условий прочности для различных классических теорий прочности [9] и критериев прочности [10] бимодульных материалов.

1). Теория наибольших нормальных напряжений.

$$\left|σ\_{1}\right|=\left|\frac{D}{2}\left(M\_{y}∙z+\sqrt{M\_{y}^{2}∙z^{2}+4\left(Q∙\frac{S\_{y\pm }^{отс.}}{b\_{\pm }^{отс.}}\right)^{2}}\right)\right|\leq \left[σ\right]\_{+}$$

$$\left|σ\_{3}\right|=\left|\frac{D}{2}\left(M\_{y}∙z-\sqrt{M\_{y}^{2}∙z^{2}+4\left(Q∙\frac{S\_{y\pm }^{отс.}}{b\_{\pm }^{отс.}}\right)^{2}}\right)\right|\leq \left[σ\right]\_{-}$$

2). Теория наибольших линейных деформаций.

$\left|\frac{D}{2}\left(\left(1-μ\right)M\_{y}∙z+(1+μ)\sqrt{M\_{y}^{2}∙z^{2}+4\left(Q∙\frac{S\_{y\pm }^{отс.}}{b\_{\pm }^{отс.}}\right)^{2}}\right)\right|\leq \left[σ\right]\_{\pm }$*.*

3).Теория наибольших касательных напряжений.

 $\left(D\sqrt{M\_{y}^{2}∙z^{2}+4\left(Q∙\frac{S\_{y\pm }^{отс.}}{b\_{\pm }^{отс.}}\right)^{2}}\right)$ $\leq \left[σ\right]\_{\pm }$ .

4). Энергетическая теория прочности.

$\left|σ\_{р\pm }\right|$ = $\left(D\sqrt{M\_{y}^{2}∙z^{2}+3\left(Q∙\frac{S\_{y\pm }^{отс.}}{b\_{\pm }^{отс.}}\right)^{2}}\right)$ $\leq \left[σ\right]\_{\pm }$

5). Критерий Шлейхера (K.Schleicher).

$σ\_{x}^{2}+σ\_{z}^{2}+σ\_{y}^{2}-2μ∙\left(σ\_{x}∙σ\_{y}+σ\_{x}∙σ\_{y}+σ\_{x}∙σ\_{y}\right)+2\left(1+μ\right)∙(τ\_{xy}^{2}+τ\_{xz}^{2}+τ\_{zy}^{2})$+($σ\_{с}-σ\_{р}$)$∙(σ\_{x}+σ\_{y}+σ\_{z})$=$σ\_{с}∙σ\_{р}$.

Для балки с бимодульным заполнителем критерий Шлейхера имеет вид:

$σ\_{\pm }^{2}$+$2\left(1+μ\right)$ $∙τ\_{\pm }^{2}+(σ\_{с}-σ\_{р})∙σ\_{\pm }$=$σ\_{с}∙σ\_{р}$.

Для армированной балки с бимодульным заполнителем критерий Шлейхера имеет вид:

$\left(\frac{M\_{y}∙z}{D}\right)^{2}+2\left(1+μ\right)∙\left(Q∙\frac{S\_{y\pm }^{отс.}}{b\_{\pm }^{отс.}∙D}\right)^{2}+$($σ\_{с}-σ\_{р}$)$∙\frac{M\_{y}∙z}{D}$ =$σ\_{с}∙σ\_{р}$.

При z =$ h\_{\pm }$, $σ\_{\pm max}=\frac{M\_{y}∙h\_{\pm }}{D}$, $τ=0 $и получаем критерий Шлейхера для нормальных напряжений:

$\left(\frac{M\_{y}∙h\_{\pm }}{D}\right)^{2}+$($σ\_{с}-σ\_{р}$)$∙\frac{M\_{y}∙h\_{\pm }}{D}$ =$σ\_{с}∙σ\_{р}$.

При z = 0, $τ=τ\_{max}, σ\_{\pm }$=0 и получаем критерий Шлейхера для касательных напряжений: $2\left(1+μ\right)∙τ\_{\pm }^{2}=σ\_{с}∙σ\_{р }или τ\_{\pm }=\sqrt{\frac{σ\_{с}∙σ\_{р }}{2\left(1+μ\right)}}$ .

6). Критерий П.П. Баландина.

$σ\_{x}^{2}+σ\_{z}^{2}+σ\_{y}^{2}-\left(σ\_{x}∙σ\_{y}+σ\_{x}∙σ\_{y}+σ\_{x}∙σ\_{y}\right)+3(τ\_{xy}^{2}+τ\_{xz}^{2}+τ\_{zy}^{2})$+($σ\_{с}-σ\_{р}$)$∙(σ\_{x}+σ\_{y}+σ\_{z})$=$σ\_{с}∙σ\_{р}$.

Для балки с бимодульным заполнителем критерий П.П. Баландина имеет вид:

$σ\_{\pm }^{2}$+$3∙τ\_{\pm }^{2}+(σ\_{с}-σ\_{р})∙σ\_{\pm }$=$σ\_{с}∙σ\_{р}$.

Для армированной балки с бимодульным заполнителем критерий П.П. Баландина имеет вид:

$\left(\frac{M\_{y}∙z}{D}\right)^{2}+3∙\left(Q∙\frac{S\_{y\pm }^{отс.}}{b\_{\pm }^{отс.}∙D}\right)^{2}+$($σ\_{с}-σ\_{р}$)$∙\frac{M\_{y}∙z}{D}$ =$σ\_{с}∙σ\_{р}$.

При z =$ h\_{\pm }$, $σ\_{\pm max}=\frac{M\_{y}∙h\_{\pm }}{D}$, $τ=0 $и получаем критерий П.П. Баландина для нормальных напряжений:

$\left(\frac{M\_{y}∙h\_{\pm }}{D}\right)^{2}+$($σ\_{с}-σ\_{р}$)$∙\frac{M\_{y}∙h\_{\pm }}{D}$ =$σ\_{с}∙σ\_{р}$.

При z = 0, $τ=τ\_{max}, σ\_{\pm }$=0 и получаем критерий Шлейхера для касательных напряжений: $τ\_{\pm }=\sqrt{\frac{σ\_{с}∙σ\_{р }}{2\left(1+μ\right)}}$ .

Здесь $σ\_{р}$- предел прочности на растяжение, $σ\_{с}$- предел прочности на сжатие.

**Литература:**

1. Амбарцумян С. А. Разномодульная теория упругости.: - М. изд-во” Наука”, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1982.-317 с.

# 2. Е.Э. Кадомцева, Л.В. Моргун. Учёт влияния отличия модулей упругости на сжатие и растяжение при расчёте на прочность армированных балок с заполнителем из фибропенобетона. [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2013, № 2. – режим доступа: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1655> (доступ свободный) - Загл. с экрана . - Яз.рус.

# 3.Андреев В.И., Языев Б.М. Выпучивание продольно сжатых стержней переменной жесткости при ползучести [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012, № 4(ч.2.). – режим доступа: http: http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1259 (доступ свободный) - Загл. с экрана . - Яз.рус.

4. Моргун Л.В., Смирнова П.В., Моргун В.Н., Богатина А.Ю. Конструкционные возможности фибропенобетона неавтоклавного твердения// Ж. «Строительные материалы», 2012, №4. – С.14…16.

5. Филин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела. Т.1. - М. изд-во” Наука”, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1981.-832 с.

6. Кадомцева Е.Э. Прочность при ударе по составной балке. ”Строительство 2009”, Материалы юбилейной международной научно- практической конференции/Ростовский государственный строительный университет - Ростов-на-Дону: редакционно-издательский центр РГСУ, 2009.-228с.

7. Чепурненко А.С., Языев Б.М. Оптимизация формы поперечного сечения сжатых стержней из условия устойчивости//Научное обозрение. 2012.  № 6.  — С. 45-49.

8. Andreev V.I. The method of optimization of thick-walled shells based on solving inverse problems of the theory of elasticity of inhomogeneous bodies. Computer Aided Optimum Design in Engineering XII. WITpress. 2012. Pp. 189—201.

 9. V. Andreev, IA Potekhin Modeling equally strong cylinder based iterative approach // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, v. 4, is. 1, 2008, p. 79- 84

10. Языев Б.М. Устойчивость жесткого сетчатого полимерного стержня с учетом начальных несовершенств. – М.: Обозрение прикладной и промышленной математики, 2008, Том 15, вып. 2.